

Федеральное агентство по образованию  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

*Н. С. Иванова*

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

## ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНЦИДЕНТНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2009

УДК 514.181.22(075.8)  
ББК 22.151.3я73  
И 209

*Иванова Н. С. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Позиционные задачи на инцидентность геометрических элементов: учеб. пособие / Н. С. Иванова. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 78 с.*

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту направления бакалаврской подготовки 150400 «Технологические машины и оборудование» и содержанию примерной учебной программы дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика» (ОПД.Ф.01).

Содержит краткое изложение основополагающих аспектов теории проекционного моделирования, а также примеры графического решения типовых позиционных задач на инцидентность геометрических элементов с подробными текстовыми комментариями.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии. Может быть использовано студентами дистанционных форм обучения.

Ил. 44. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

© Иванова Н. С., 2009  
© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Построение проекционных моделей .....	6
2. Моделирование точки и линии на эюре Монжа .....	7
3. Моделирование плоскости на эюре Монжа .....	20
4. Моделирование поверхностей на эюре Монжа .....	29
4.1. Моделирование линейчатых поверхностей .....	30
4.1.1. Моделирование конической поверхности .....	30
4.1.2. Моделирование цилиндрической поверхности .....	40
4.1.3. Моделирование призматической поверхности .....	46
4.1.4. Моделирование пирамидальной поверхности .....	52
4.2. Моделирование поверхностей вращения .....	56
Библиографический список .....	77

## ВВЕДЕНИЕ

С изучения дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика» начинается цикл общепрофессиональных дисциплин, предусмотренных учебным планом направления бакалаврской подготовки 150400 «Технологические машины и оборудование» [4].

Целью дисциплины «Начертательная геометрия. Инженерная графика» является развитие у студентов способностей воспринимать и передавать информацию о форме, размерах и взаимном расположении пространственных объектов с помощью технических чертежей, построенных на основе методов проекционного моделирования, а также умения разрабатывать конструкторскую документацию в соответствии со стандартами Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

Непосредственной целью изучения раздела «Начертательная геометрия» является развитие образного, пространственного мышления, способностей к анализу и синтезу геометрических форм, овладение методами построения плоских проекционных моделей трехмерного пространства и выработка умений выражать свойства пространственных объектов и отношений между ними средствами геометрической модели.

Учебным планом в рамках раздела курса «Начертательная геометрия» предусмотрены:

- лекции;
- практические занятия: решение задач и выполнение графических работ под руководством преподавателя, осуществление текущего и рубежного контроля знаний студентов;
- самостоятельная работа студентов: повторение пройденного материала по конспектам, учебной литературе; выполнение домаш-

них заданий, графических работ, подготовка к практическим занятиям и экзаменам; освоение компьютерных технологий.

Итоговая аттестация с оценкой знаний по разделу курса «Начертательная геометрия» проводится в форме письменного экзамена.

Комплекс геометрических задач для решения на практических занятиях и при самостоятельной подготовке представлен в рабочих тетрадях [3, 6, 7].

Для успешного усвоения курса рекомендуется использовать учебную литературу [2, 3, 6, 7, 8]. Прежде чем приступать к решению задач или выполнению графических работ, нужно прочитать соответствующие разделы учебников, учебных и методических пособий. Необходимо анализировать представленные в литературе решения задач, особое внимание уделять иллюстрациям, чертежам.

В заданиях по начертательной геометрии графические построения должны выполняться очень точно, с помощью качественных чертежных инструментов, в полном соответствии с положениями стандартов ЕСКД «Общие правила выполнения чертежей» [1].

При оформлении задач и эскизов все геометрические элементы пространства (точки, отрезки прямых, плоскости, поверхности) необходимо обозначать с учетом принятых обозначений [3]: точки — прописными буквами латинского алфавита ( $A, B, C...$ ) или арабскими цифрами ( $1, 2, 3...$ ); прямые, кривые линии — строчными буквами латинского алфавита ( $a, b, c...$ ); плоскости — строчными буквами греческого алфавита ( $\alpha, \beta, \gamma...$ ); поверхности — прописными буквами греческого алфавита ( $\Sigma, \Psi, \Omega...$ ).

Вспомогательные построения, выполненные в процессе геометрического решения, рекомендуется оставлять на чертежах в тонких линиях, а полученный результат обводить основной линией.

В данном учебном пособии кратко рассмотрены основные теоретические аспекты построения проекционных моделей пространственных объектов по методу Монжа, приведены поэтапные решения типовых позиционных задач на инцидентность геометрических элементов с подробными текстовыми комментариями.

Пособие может быть использовано в качестве дополнительной литературы при самостоятельном решении задач в рабочей тетради [3], при подготовке к проверочным и контрольным работам, а также при подготовке к экзамену.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором пространственные объекты изучаются по их проекционным моделям.

Вопросы построения проекционных моделей геометрических фигур подробно изложены в основной литературе [2, 8].

Задачи, решаемые методами проекционного моделирования, принято делить на два класса:

- позиционные;
- метрические.

Позиционные задачи, в свою очередь, можно разделить на:

- задачи на взаимный порядок геометрических элементов;
- задачи на принадлежность (инцидентность) геометрических элементов;
- задачи на взаимное пересечение геометрических фигур.

В данном учебном пособии рассмотрены позиционные задачи на определение:

- принадлежности точки линии;
- принадлежности точки поверхности;
- принадлежности линии поверхности.

В основе решения всех геометрических задач лежат основные свойства проецирования:

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой есть прямая, в частном случае, — точка.
3. Инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется.

Следствие:

Если точка есть результат пересечения прямых, то проекция этой точки определяется пересечением проекций этих прямых.

4. При параллельном проецировании проекции параллельных прямых параллельны, то есть проекцией несобственной точки является несобственная точка.

5. При параллельном проецировании отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проецируемых отрезков.

6. Параллельная проекция фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна самой фигуре.

7. При ортогональном проецировании прямой угол проецируется без искажения, если, по крайней мере, одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

Теоретической базой для выполнения чертежей является метод Монжа — частный случай метода двух изображений. Эпюром Монжа называется плоская модель трехмерного пространства, полученная методом ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций [2, стр. 11], [8, стр. 26].

Проекционные модели любых геометрических фигур пространства (линий, поверхностей) можно представить в виде совокупностей моделей отдельных точек. Промоделировать фигуру — это значит выявить способ, который позволяет находить на геометрической модели проекции всех точек, принадлежащих данной фигуре.

Совокупность условий, задающих геометрическую фигуру, называется ее определителем. Определитель состоит из двух частей: геометрической и алгоритмической. Геометрическая часть определителя (репер) включает в себя некоторые постоянные геометрические элементы, участвующие в образовании фигуры. Алгоритмическая часть определителя указывает на взаимосвязь между элементами репера и содержит перечень операций, позволяющих реализовать переход от репера к остальным элементам геометрической фигуры. Причем, одна и та же фигура может иметь разные определители, в зависимости от выбранного способа ее образования.

Таким образом, при проекционном моделировании геометрической фигуры различают два этапа: моделирование репера, а затем — реализация соответствующего перехода от геометрической части определителя к модели произвольной точки, принадлежащей данной фигуре.

## **2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ НА ЭПЮРЕ МОНЖА**

Модель точки на эпюре Монжа представляет собой пару точек, расположенных на одной линии связи, перпендикулярной оси проекций  $x_{12}$ . Проекции точек располагаются относительно оси проекций  $x_{12}$  соответственно тому, в какой четверти пространства и на каком расстоянии до плоскостей проекций находится точка (рис. 1).

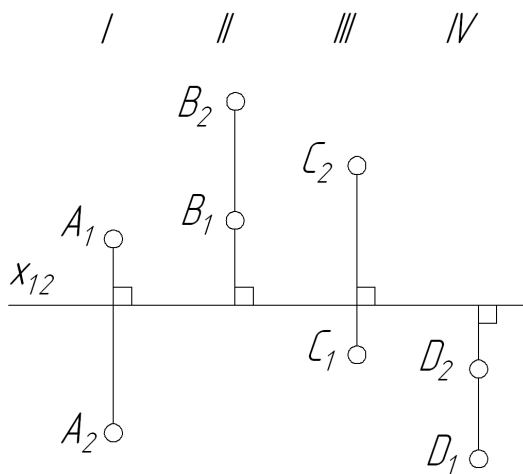


Рис. 1

Моделью прямой линии на эюре Монжа в общем случае является пара прямых. Геометрическим определителем прямой линии служат две точки. Задав на модели две пары точек ( $A_1 - A_2$ ) и ( $B_1 - B_2$ ), мы промоделировали репер прямой  $AB$  на эюре Монжа. Алгоритмическая часть определителя заключается в операции соединения соответствующих проекций точек прямыми линиями (рис. 2).

В частном случае моделью прямой на эюре Монжа могут быть прямая и точка (рис. 3):

- фронтально-проецирующая прямая  $a(a_1 - a_2)$ ;
- горизонтально-проецирующая прямая  $b(b_1 - b_2)$ .

К прямым частного положения относятся также линии уровня — прямые, параллельные плоскостям проекций (рис. 4):

- первая линия уровня (фронталь)  $f(f_1 - f_2)$  параллельна плоскости проекций  $\pi_1$ ;
- вторая линия уровня (горизонталь)  $h(h_1 - h_2)$  параллельна плоскости проекций  $\pi_2$ .

Проекции  $f_2$  и  $h_1$  параллельны оси проекций  $x_{12}$ .

Прямые уровня часто используются при решении задач, так как в одном из полей проекций можно измерить длины отрезков этих прямых и их углы наклона к плоскостям проекций: углы  $\alpha$  и  $\beta$  являются, соответственно, истинными величинами углов наклона



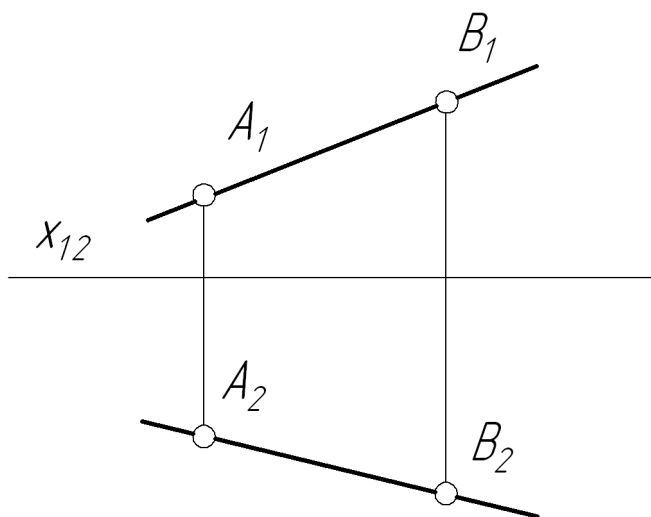


Рис. 2

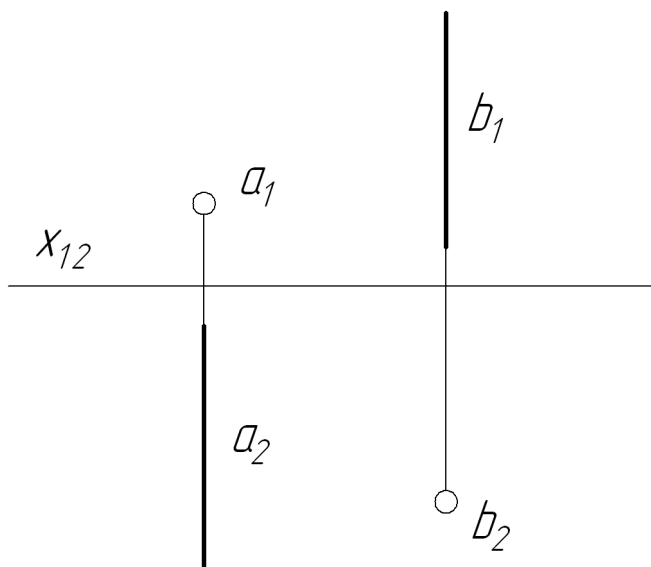


Рис. 3

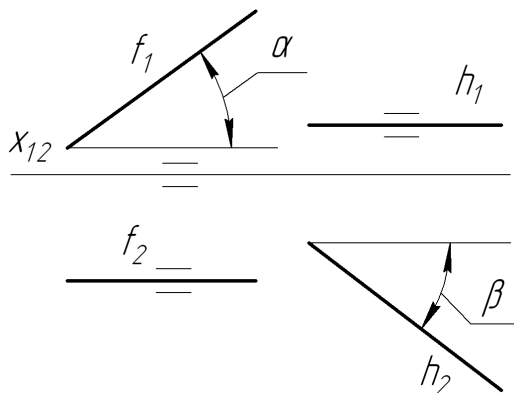


Рис. 4

фронты  $f$  к плоскости проекций  $\pi_2$ , горизонталь  $h$  — к плоскости проекций  $\pi_1$ .

Прямые, принадлежащие плоскостям, перпендикулярным одновременно плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , называются профильными. Для придания однозначности модели профильной прямой  $c(c_1 - c_2)$  необходимо указать проекции двух принадлежащих ей точек, в данном случае, точек  $K$  и  $L$  (рис. 5).

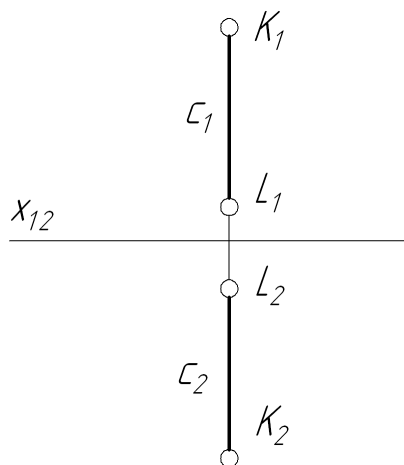


Рис. 5

Моделью кривой линии является пара линий, причем, по крайней мере, одна из них является кривой, исключение составляет модель кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной одновременно плоскостям проекций  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

Кривая называется плоской, если все ее точки расположены в одной плоскости. Кривая линия, которая не может быть совмещена с плоскостью всеми своими точками, называется пространственной.

Кривую линию рассматривают как траекторию перемещения точки или как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек.

Для построения ортогональных проекций кривой необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой их одноименные проекции в той же последовательности, в какой они находились на самом геометрическом объекте. Для придания однозначности модели кривой  $s(s_1 - s_2)$  необходимо задать порядок следования точек (рис. 6, а) или положение хотя бы одной точки и направление обхода кривой (рис. 6, б).

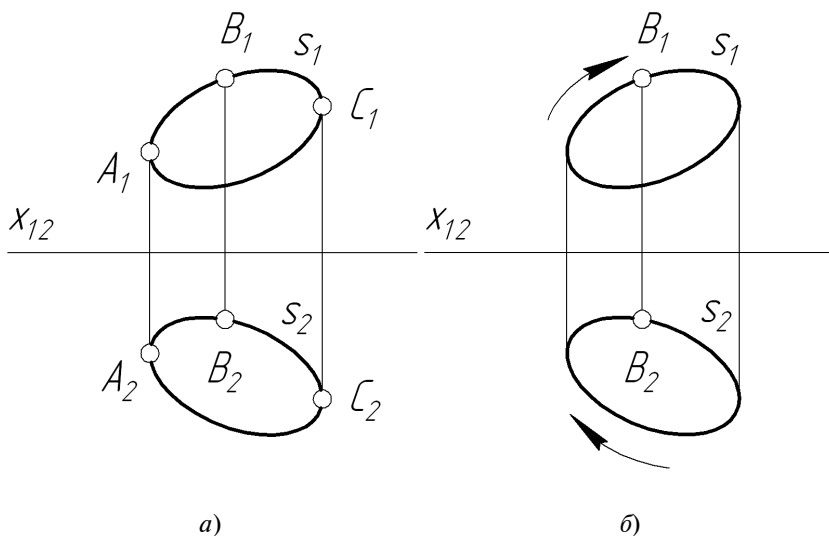


Рис. 6

Основоположник начертательной геометрии Гаспар Монж (1746—1818) говорил: «*Кто совсем свободно знает прямую и плоскость, тот не встретит затруднений в начертательной геометрии*» [5].

Поэтому приступим к рассмотрению алгоритмов решений позиционных задач, начиная с самого простого — построения точки, принадлежащей линии.

### ЗАДАЧА 1

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $N$ , принадлежащей прямой общего положения  $n(n_1 - n_2)$  (рис. 7, а).

#### **Комментарии к решению задачи:**

Согласно свойству проецирования № 3, инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется. Поэтому проекция  $N_2$  точки  $N$  должна принадлежать проекции  $n_2$  прямой  $n$ .

Из правила моделирования точки следует, что моделью точки  $N$  является пара точек, лежащих на одной линии связи, перпендикулярной оси проекции  $x_{12}$ .

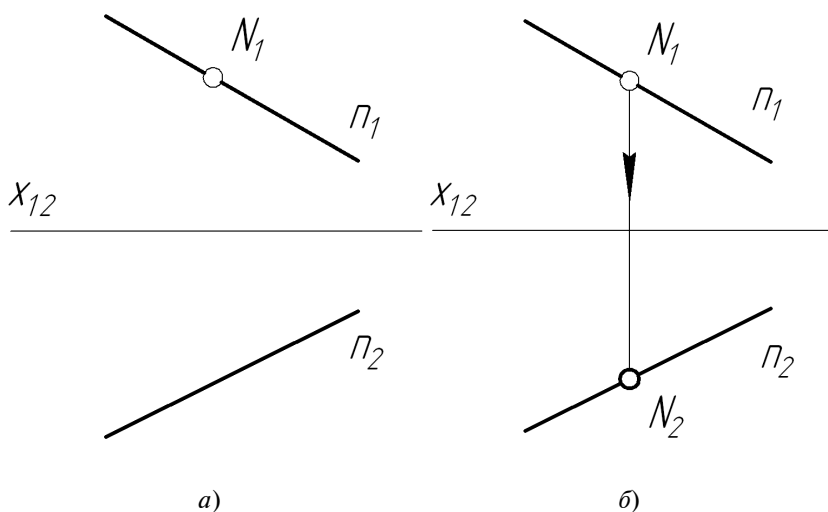


Рис. 7

Определяем недостающую проекцию  $N_2$  точки  $N$  как результат пересечения линии связи с проекцией  $n_2$  прямой  $n$  (рис. 7, б).

## ЗАДАЧА 2

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $Q$ , принадлежащей фронтально-проецирующей прямой  $p(p_1 - p_2)$  (рис. 8, а).

### *Комментарии к решению задачи:*

Согласно свойству проецирования № 3, инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется. Поэтому проекция  $Q_1$  точки  $Q$  должна принадлежать проекции  $p_1$  прямой  $p$ .

Из правила моделирования точки следует, что моделью точки  $Q$  является пара точек, лежащих на одной линии связи, перпендикулярной оси проекции  $x_{12}$ .

Так как вырожденная проекция  $p_1$  фронтально-проецирующей прямой обладает собирательным свойством, все точки прямой  $p$ , в том числе и точка  $Q$ , проецируются во фронтальной плоскости проекций в одну точку, совпадающую с проекцией  $p_1$  прямой  $p$  (рис. 8, б).

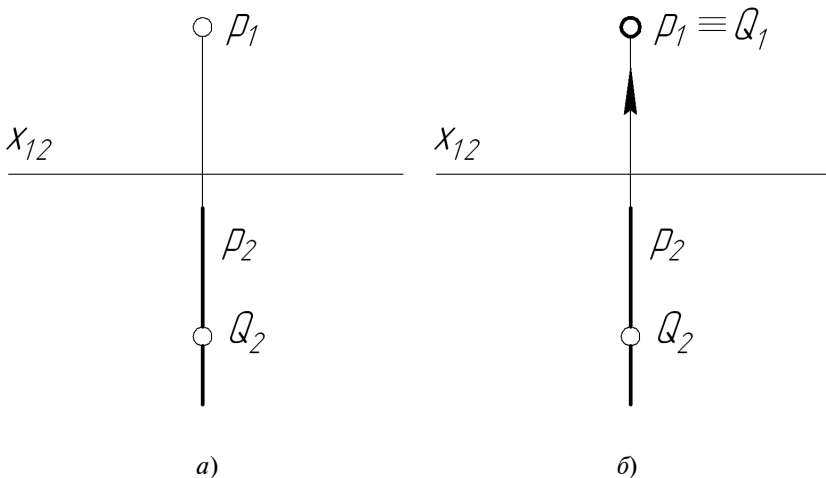


Рис. 8

### ЗАДАЧА 3

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $P$ , принадлежащей горизонтально-проецирующей прямой  $q(q_1 - q_2)$  (рис. 9, а).

#### **Комментарии к решению задачи:**

Согласно свойству проецирования № 3, инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется. Поэтому проекция  $P_1$  точки  $P$  должна принадлежать проекции  $q_1$  прямой  $q$ .

Из правила моделирования точки следует, что моделью точки  $P$  является пара точек, лежащих на одной линии связи, перпендикулярной оси проекции  $x_{12}$ .

Задача имеет бесконечное множество решений, так как горизонтальной проекцией любой точки, принадлежащей прямой  $q$ , является точка, совпадающая с вырожденной проекцией  $q_2$  прямой  $q$  (рис. 9, б).

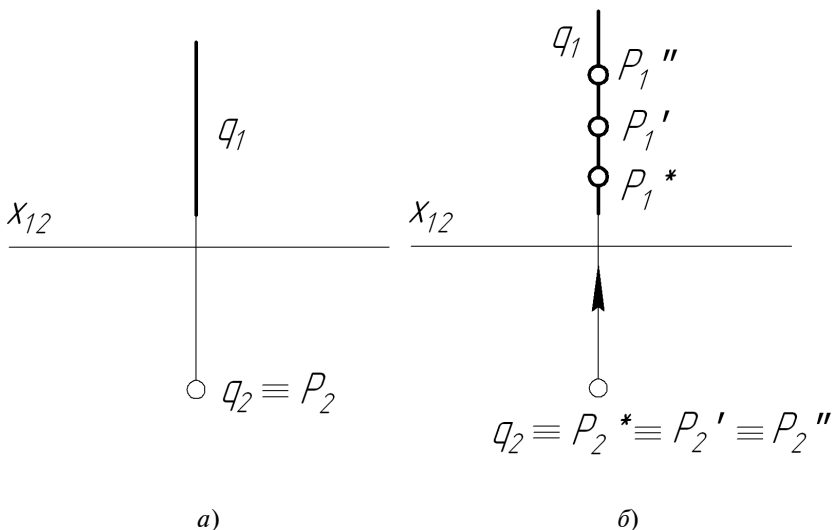


Рис. 9

#### ЗАДАЧА 4

На эюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $M$ , принадлежащей профильной прямой  $d(d_1 - d_2)$ , заданной точками  $C(C_1 - C_2)$  и  $D(D_1 - D_2)$  (рис. 10, а).

##### Комментарии к решению задачи:

Согласно свойству проецирования № 3, инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется. Поэтому проекция  $M_2$  точки  $M$  должна принадлежать проекции  $d_2$  прямой  $d$ .

Из правила моделирования точки следует, что моделью точки  $M$  является пара точек, лежащих на одной линии связи, перпендикулярной оси проекции  $x_{12}$ .

Решение по алгоритму *Задачи 1* в этом случае неосуществимо. Для построения недостающей проекции  $M_2$  точки  $M$  нужно воспользоваться свойством проецирования № 5: разделить отрезки  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$  точками  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, в пропорциональном отношении. Один из возможных приемов приведен на рис. 10, б.

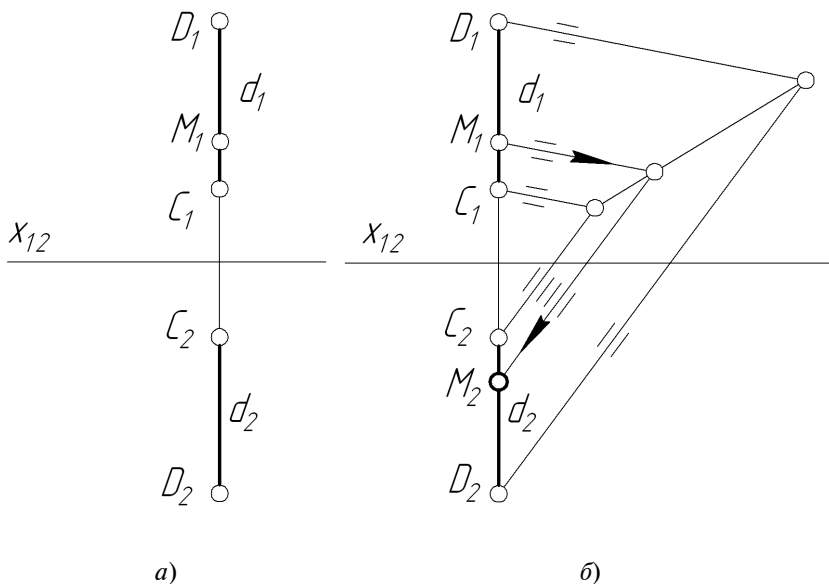


Рис. 10

### ЗАДАЧА 5

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $R$ , принадлежащей кривой линии  $m(m_1 - m_2)$  (рис. 11, а).

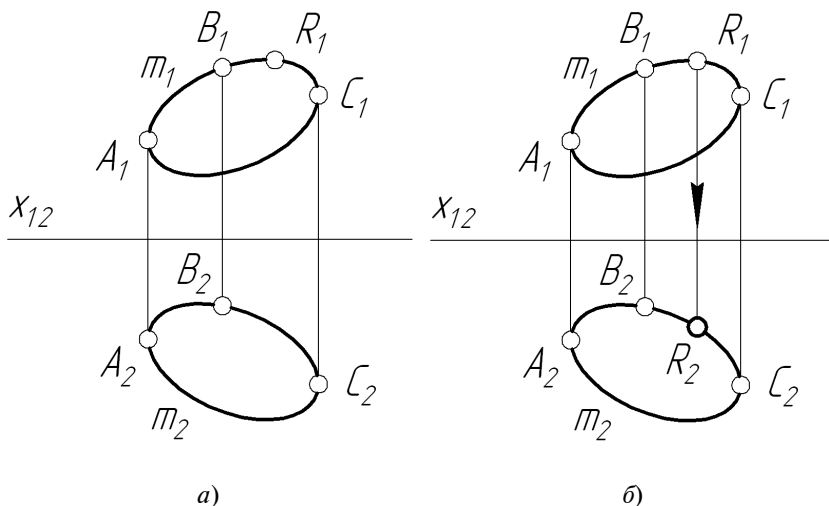


Рис. 11

#### Комментарии к решению задачи:

Согласно свойству проецирования № 3, инцидентность точек и линий при проецировании сохраняется. Поэтому проекция  $R_2$  точки  $R$  должна принадлежать проекции  $m_2$  кривой  $m$ .

Из правила моделирования точки следует, что моделью точки  $R$  является пара точек, лежащих на одной линии связи, перпендикулярной оси проекции  $x_{12}$ .

Определяем недостающую проекцию  $R_2$  точки  $R$  как результат пересечения линии связи с проекцией  $m_2$  кривой  $m$ .

Кривая задана однозначно, поэтому решение одно: проекция  $R_2$  может находиться только на участке  $B_2C_2$  (рис. 11, б).

### ЗАДАЧА 6

На эпюре Монжа построить горизонталь  $h(h_1 - h_2)$ , пересекающую заданные прямые  $a(a_1 - a_2)$ ,  $b(b_1 - b_2)$  и  $c(c_1 - c_2)$ , соответственно, в точках  $A(A_1 - A_2)$ ,  $B(B_1 - B_2)$  и  $C(C_1 - C_2)$  (рис. 12, а).



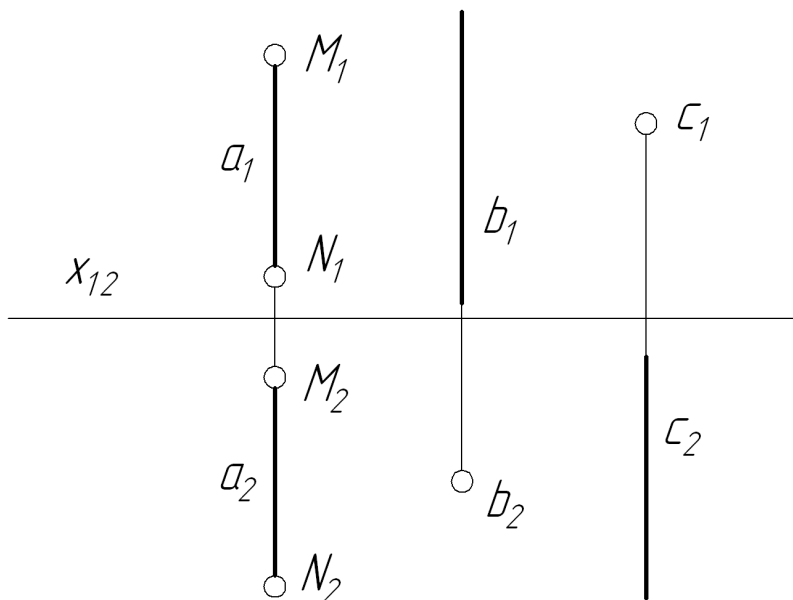


Рис. 12, а

**Комментарии к решению задачи:**

Начинать построение требуемой горизонтали  $h$  следует с фронтальной проекции  $h_1$ , так как фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси проекций  $x_{12}$ .

Чтобы построенная горизонталь  $h$  пересекала все три заданные прямые, проведем проекцию  $h_1$  через вырожденную проекцию  $c_1$  фронтально-проецирующей прямой  $c$  (согласно следствию из основного свойства проецирования № 3). Отметим фронтальные проекции точек пересечения горизонтали  $h$  с заданными прямыми:  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (рис. 12, б).

Построим горизонтальные проекции этих точек: недостающую проекцию  $A_2$  точки  $A$ , принадлежащей профильной прямой  $a$ , найдем по аналогии с построением, приведенным в решении *Задачи 4*; проекция  $B_2$  точки  $B$  совпадает с вырожденной проекцией  $b_2$  горизонтально-проецирующей прямой  $b$ ; проекция  $C_2$  точки  $C$  определяется автоматически (из бесконечного множества решений), так как для построения прямой необходимо и достаточно двух точек (рис. 12, в).

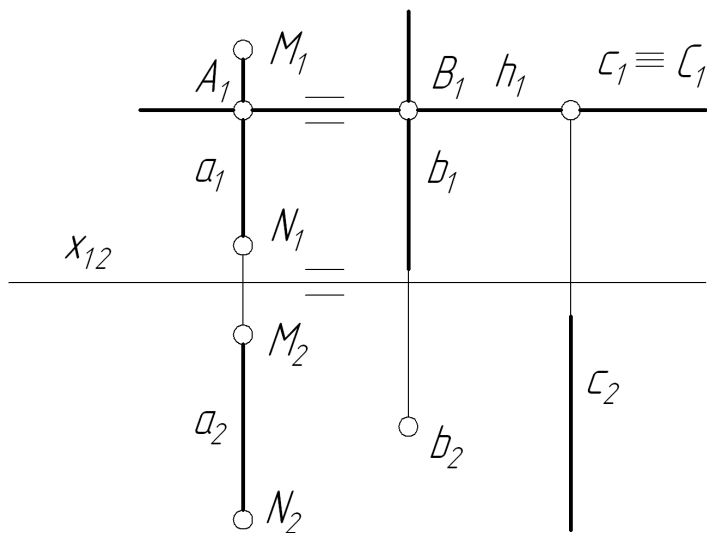


Рис. 12, б

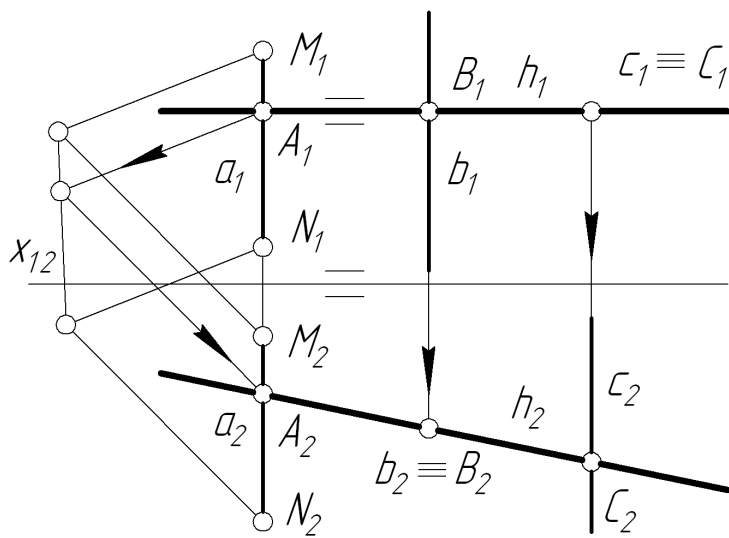


Рис. 12, в

### ЗАДАЧА 7

Определить недостающую проекцию точки  $A$ , принадлежащей фронтالي, пересекающей плоскую кривую  $s(s_1 - s_2)$  и составляющей с плоскостью проекций  $\pi_2$  угол  $45^\circ$  (рис. 13,  $a$ ).

#### Комментарии к решению задачи:

Угол наклона фронтالي к горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$  проецируется в поле  $\pi_1$  без искажения, поэтому проведем первую проекцию искомой фронтали через проекцию  $A_1$  точки  $A$  под углом  $45^\circ$  к оси проекций  $x_{12}$  (рис. 13,  $b$ ). Фронталь, имеющая такую первую проекцию, может пересекать кривую  $s$  в точке  $E$  или в точке  $G$ .

Первый вариант: точка  $A$  принадлежит фронтالي  $AE$ . Построим горизонтальную проекцию фронтали  $AE$ : определим проекцию  $E_2$  из условия принадлежности точки  $E$  кривой  $s$  и проведем горизонтальную проекцию фронтали через проекцию  $E_2$  параллельно оси  $x_{12}$  (горизонтальная проекция любой фронтали параллельна оси проекций  $x_{12}$ ). Отметим недостающую проекцию  $A_2$  точки  $A$  на пересечении линии связи с горизонтальной проекцией фронтали  $AE$  (рис. 13,  $b$ ).

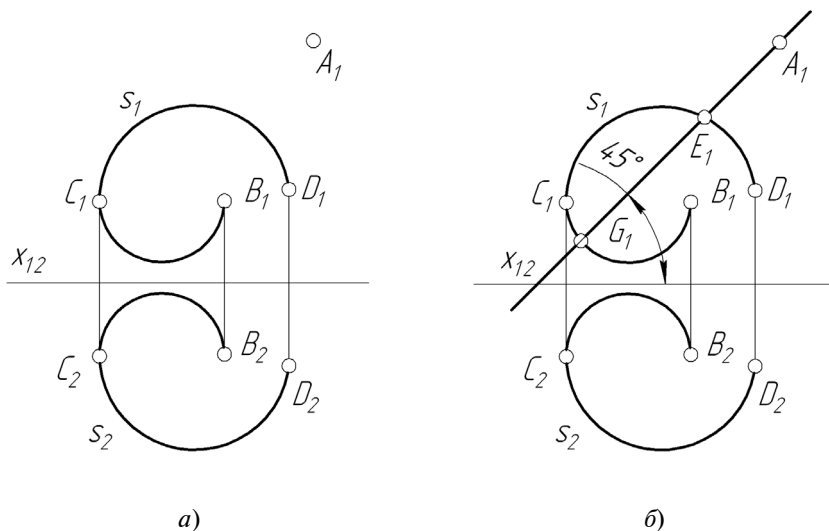


Рис. 13

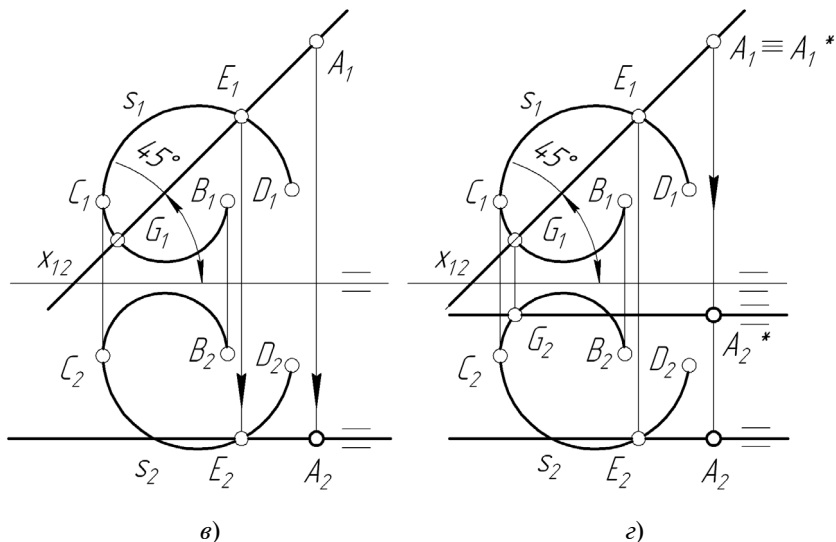


Рис. 13

Второй вариант: точка  $A$  принадлежит фронтالي  $AG$ . Построим горизонтальную проекцию фронтالي  $AG$ : определим проекцию  $G_2$  из условия принадлежности точки  $G$  кривой  $s$  и проведем горизонтальную проекцию фронтالي через проекцию  $G_2$  параллельно оси проекций  $x_{12}$ . Отметим недостающую проекцию  $A_2^*$  точки  $A^*$  на пересечении линии связи с горизонтальной проекцией фронтالي  $AG$ .

Таким образом, в этой задаче два ответа: горизонтальные проекции точек  $A$  и  $A^*$  (рис. 13, г).

Задачи 6 и 7 можно отнести к группе позиционных задач на взаимное пересечение геометрических фигур, но тем не менее они рассмотрены в данном учебном пособии, так как их решение основано на свойстве проецирования № 3 (свойстве инцидентности).

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

Геометрическую часть определителя плоскости могут составлять:

$a$  — три точки, не лежащие на одной прямой;

$b$  — прямая и точка;

$в$  — две пересекающиеся прямые;

$z$  — две параллельные прямые;  
 $d$  — отсек плоскости в виде треугольника.

Соответствующие вышеперечисленным реперам модели плоскостей, построенные по методу Монжа, изображены на рисунке 14 ( $a, б, в, г, д$ ).

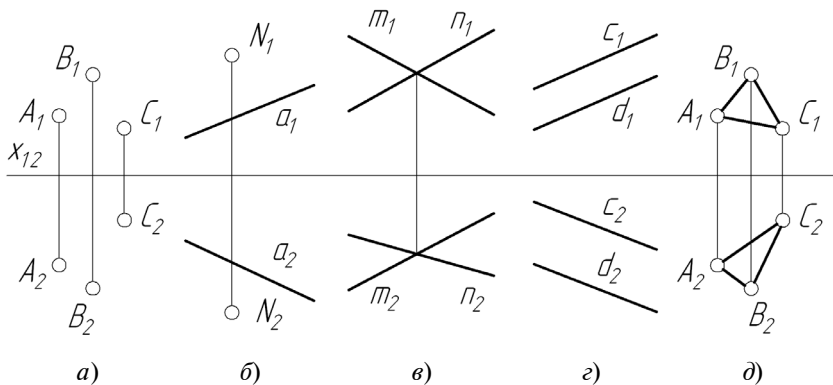


Рис. 14

Плоскость, перпендикулярная плоскости проекций  $\pi_1$ , называется фронтально-проецирующей (рис. 15,  $a$ ). Плоскость, перпендикулярная плоскости проекций  $\pi_2$ , — горизонтально-проецирующей (рис. 15,  $б$ ). Одна из проекций проецирующей плоскости — прямая линия (вырожденная проекция).

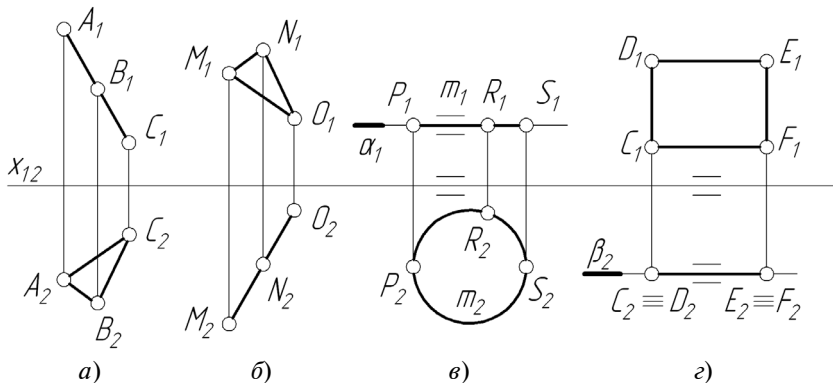


Рис. 15

Частным случаем проецирующих плоскостей являются плоскости уровня, параллельные одной из плоскостей проекций (рис. 15, в, г). Согласно свойству проецирования № 6, одна из проекций фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна самой фигуре.

### ЗАДАЧА 8

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию прямой  $l$ , принадлежащей плоскости  $\alpha(A, B, C)$  (рис. 16, а).

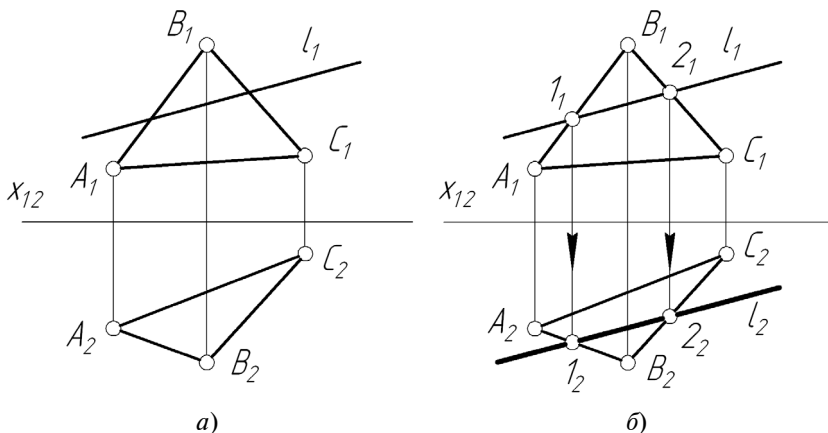


Рис. 16

#### **Комментарии к решению задачи:**

Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат данной плоскости. Выберем в качестве геометрического определителя прямой  $l$  точки ее пересечения с репером плоскости 1 и 2. Отметим на чертеже их фронтальные проекции  $1_1$  и  $2_1$ . Горизонтальную проекцию  $l_2$  прямой  $l$ , принадлежащей плоскости  $\alpha$ , проведем через горизонтальные проекции точек 1 и 2, построенных, соответственно, из условия принадлежности отрезкам прямых  $AB$  и  $BC$  (рис. 16, б).

### ЗАДАЧА 9

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию точки  $D$ , принадлежащей плоскости  $\alpha(A, B, C)$  (рис. 17, а).

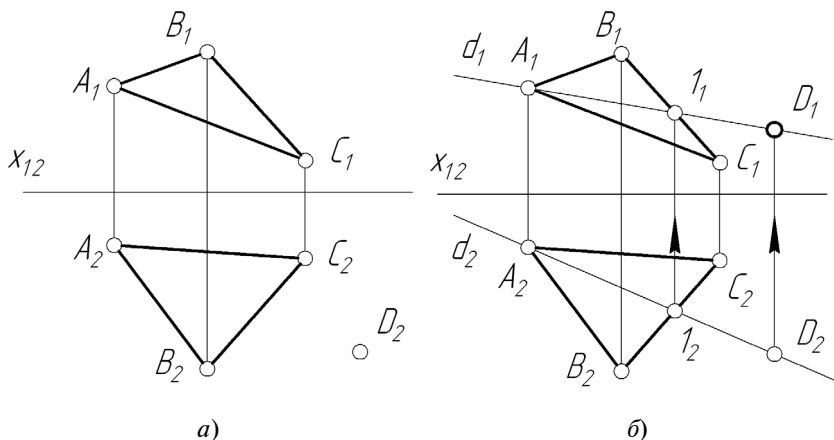


Рис. 17

### **Комментарии к решению задачи:**

Точка принадлежит плоскости, если она лежит на какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.

Поэтому, для построения недостающей проекции точки  $D$  необходимо построить проекции вспомогательной прямой  $d$ , проходящей через эту точку и принадлежащей заданной плоскости. Чтобы построить проекции прямой  $d$ , нужно иметь проекции двух ее точек, принадлежащих плоскости  $\alpha$ . Проведем горизонтальную проекцию  $d_2$  вспомогательной прямой  $d$  через заданную проекцию  $D_2$  точки  $D$  и через проекцию  $A_2$  точки  $A$ . Выберем в качестве геометрического определителя прямой  $d$  точки  $A$  и  $I$  ее пересечения с репером плоскости:  $d(A, I)$ . Построим фронтальную проекцию  $d_1(A_1, I_1)$  из условия принадлежности прямой  $d$  плоскости  $\alpha$ . Согласно свойству проецирования № 3, проекция  $D_1$  точки  $D$  должна лежать на проекции  $d_1$  прямой  $d$  (на линии связи, перпендикулярной оси проекций  $x_{12}$ ).

### **ЗАДАЧА 10**

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $f$ , принадлежащей плоскости  $\omega(m, n)$  (рис. 18, а).

### **Комментарии к решению задачи:**

Решение задачи заключается в нахождении горизонтальной проекции треугольника  $f$ . Для этого необходимо построить горизонтальные

проекции вершин треугольника, то есть трижды решить задачу по определению недостающих проекций точек, принадлежащих заданной плоскости.

Так как в задаче задана фронтальная проекция  $f_1$  линии  $f$ , обозначим проекции вершин треугольника, соответственно,  $A_1, B_1, C_1$  (рис. 18, б).

Проекцию  $A_2$  точки  $A$  находим из условия принадлежности точки  $A$  прямой  $n$ .

Для построения горизонтальной проекции точки  $B$  используем вспомогательную прямую  $lA$ , принадлежащую заданной плоскости  $\omega$ .

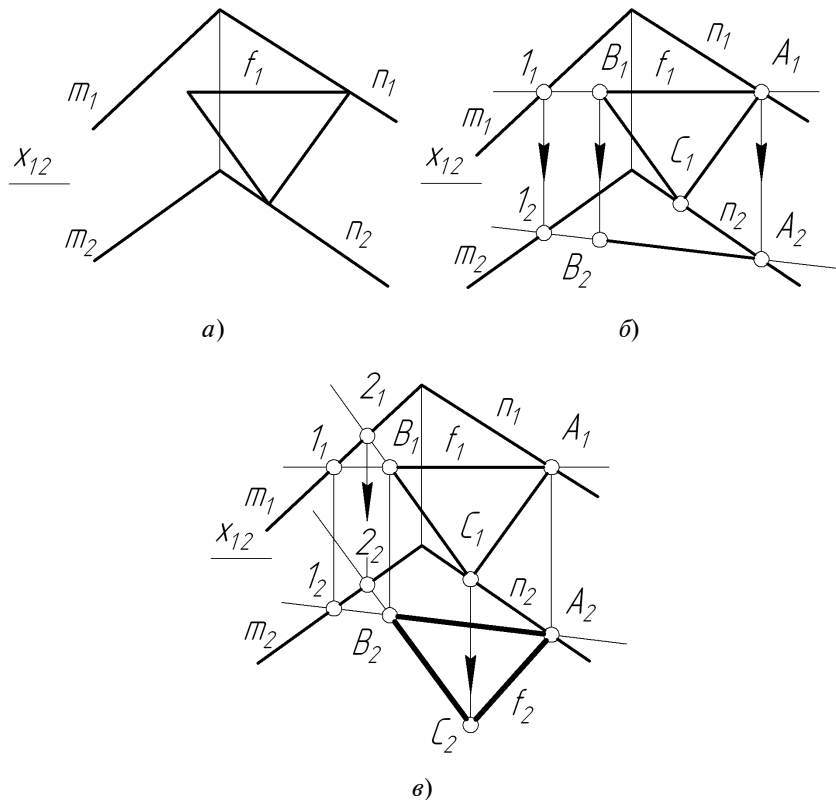


Рис. 18



На первый взгляд, построение горизонтальной проекции точки  $C$  кажется тривиальным. Но, необходимо обратить внимание на то, что фронтальная проекция  $C_1$  точки  $C$  расположена на горизонтальной проекции  $n_2$  прямой  $n$  (случайное совпадение проекций геометрических элементов, расположенных в разных четвертях пространства): точка  $C$  не принадлежит прямой  $n$ . Для построения горизонтальной проекции точки  $C$  используем вспомогательную прямую  $2B$ , принадлежащую заданной плоскости  $\omega$  (рис. 18, в).

Соединив полученные проекции  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  отрезками прямых, получим искомую горизонтальную проекцию  $f_2$  линии  $f$ .

### ЗАДАЧА 11

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $m$ , принадлежащей плоскости  $\beta(b, c)$  (рис. 19, а).

#### **Комментарии к решению задачи:**

Построение проекций линии, принадлежащей плоскости, заключается в определении проекций ряда точек, принадлежащих заданной линии. Линия  $m$  состоит из нескольких прямолинейных и криволинейных участков. Так как чертеж будет достаточно насыщенным, подобные задачи рекомендуется решать в масштабе увеличения. Начнем построения с определения недостающих проекций прямолинейных сегментов — отрезков 12 и 34 (рис. 19, б). Из рисунка видно, что для построения фронтальных проекций точек 2 и 5 использовалась прямая 16, заданная точками 1 и 6, принадлежащими реперу плоскости  $\beta(b, c)$ . При построении фронтальных проекций точек 3 и 4 была учтена параллельность отрезка 34 прямым  $b$  и  $c$  (свойство проецирования № 4).

Сегменты {1, 7, 11, 9, 3} и {4, 8, 12, 10, 2} — кривые линии (на горизонтальной проекции они заданы дугами окружностей) (рис. 19, в). Сначала построим недостающие проекции точек 7 и 8: проекцию  $8_1$  найдем из

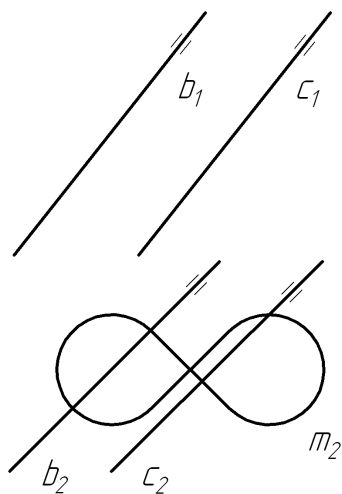


Рис. 19, а

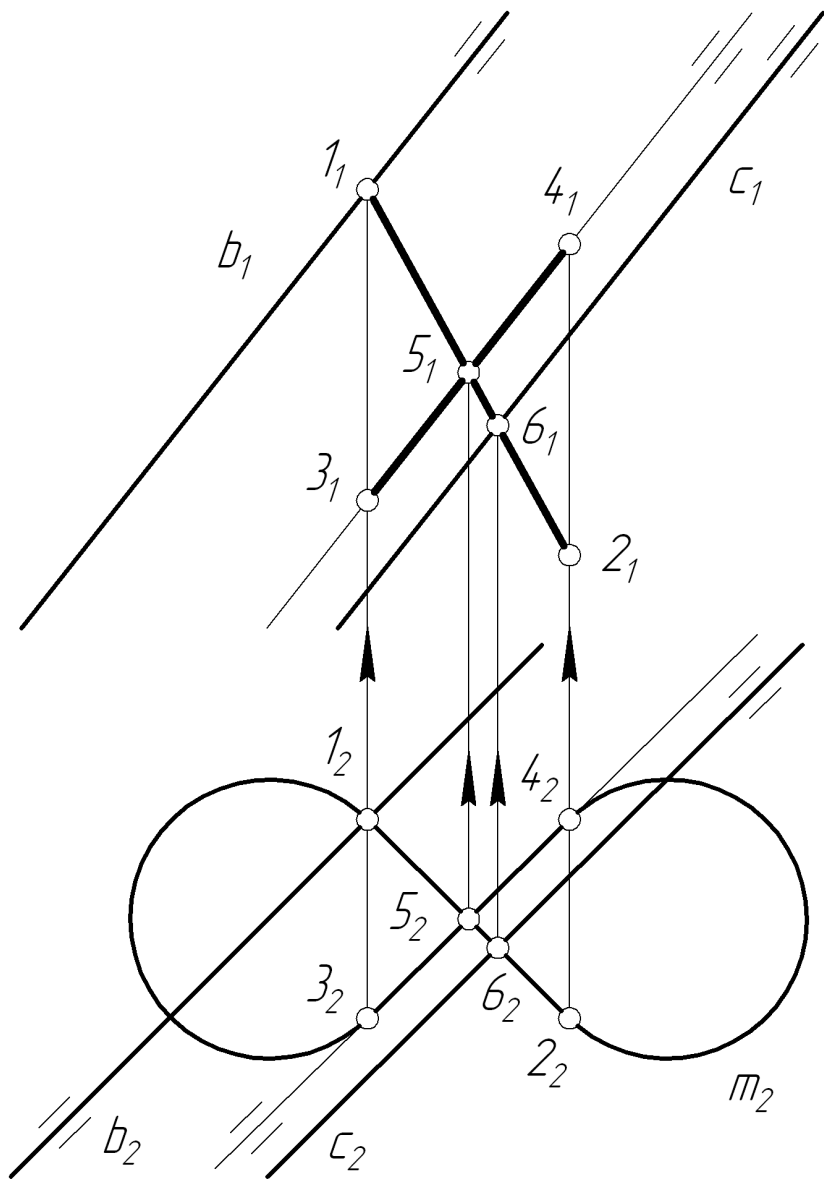


Рис. 19, б

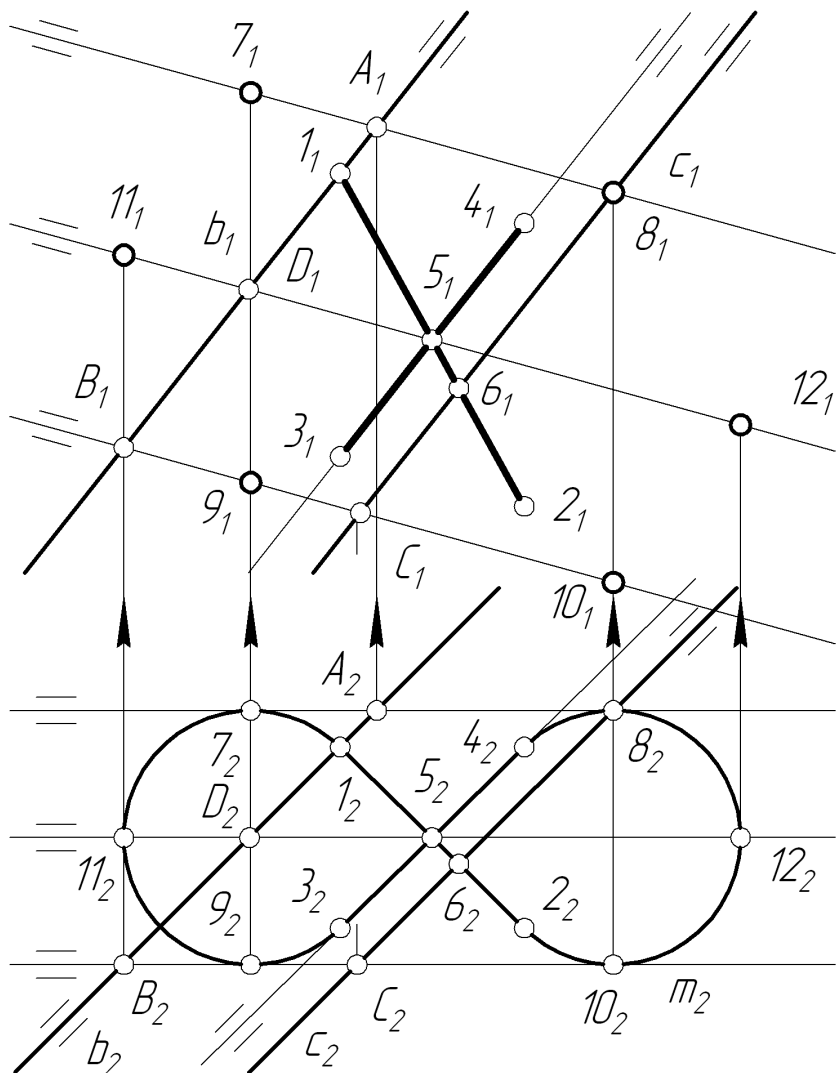


Рис. 19, в

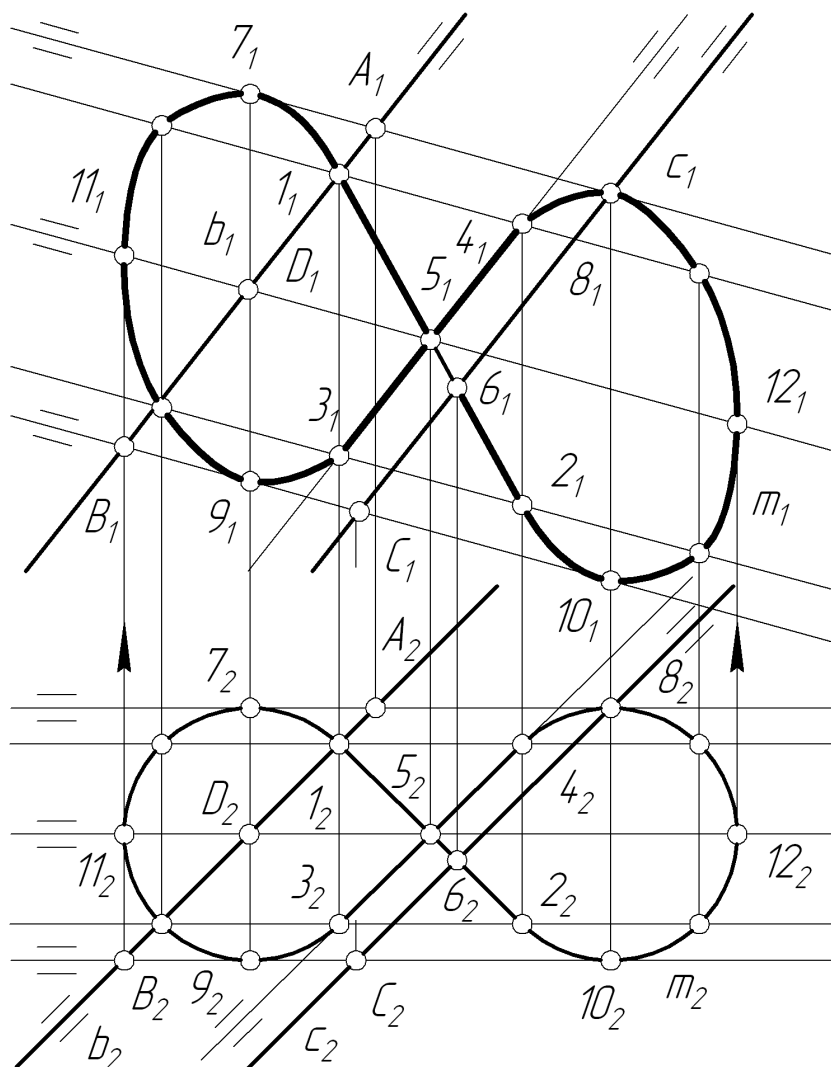


Рис. 19, з

условия принадлежности точки  $\delta$  прямой  $c$ ; для построения фронтальной проекции точки  $7$  используем вспомогательную прямую  $A\delta$ . С помощью прямой  $BC$ , параллельной прямой  $A\delta$ , найдем фронтальные проекции точек  $9$  и  $10$ . Проекции точек  $11$  и  $12$  строим из условия их принадлежности вспомогательной прямой  $D5$ .

Если мысленно соединить на фронтальной проекции полученные точки, можно представить результат решения задачи. Для более точного решения необходимо найти проекции еще нескольких промежуточных точек (их проекции на чертеже можно не обозначать). Окончательный вариант решения — фронтальная проекция  $m_1$  линии  $m$ , принадлежащей плоскости  $\beta(b, c)$ , представлен на рисунке 19,  $г$ .

#### **4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ЭПЮРЕ МОНЖА**

Основными способами задания поверхностей являются: аналитический, кинематический и каркасный [2, стр. 20]. При кинематическом способе поверхность рассматривается как совокупность всех последовательных положений некоторой линии (образующей), перемещающейся по определенному закону, задаваемому другой линией (направляющей). Одна и та же поверхность может быть образована различными способами. Классификация поверхностей на основе их определителя приведена в учебнике [8, стр. 88].

На эюре Монжа поверхность задается проекциями ее репера. Для обеспечения наглядности изображения на чертеже необходимо указать очерки поверхности, являющиеся проекциями контурной линии [2, стр. 22], отметить видимость элементов репера. Условно считают, что при проецировании элементов пространства на плоскость проекций, моделируемые объекты всегда расположены перед наблюдателем. Взгляд наблюдателя направлен на объект и совпадает с проецирующим лучом. Видимым считается объект, расположенный ближе к наблюдателю. Вопрос о том, какой из объектов расположен ближе к наблюдателю, решается на модели при помощи проекций конкурирующих точек [2, стр. 13]. Поверхность считается непрозрачной.

Чтобы на эюре Монжа изобразить точку, принадлежащую поверхности, необходимо сначала построить проекции какой-либо вспомогательной линии, принадлежащей поверхности, а затем на

этой линии отметить проекции точки. В качестве вспомогательных линий, как правило, выбираются графически простые линии (прямые, окружности).

Используя алгоритм построения точки, принадлежащей поверхности, можно построить проекции любой линии, принадлежащей поверхности, рассматривая ее как совокупность отдельных точек.

Решение подобных задач рационально начинать с определения проекций точек, принадлежащих контурным линиям (точек изменения видимости линии при проецировании на плоскости проекций). Затем следует определить проекции нескольких промежуточных точек. Проекции полученных точек соединяют с учетом видимости участков построенной линии при проецировании на соответствующую плоскость проекций. Для обозначения видимых участков применяют сплошную основную линию, для невидимых — штриховую.

В данном учебном пособии рассмотрены алгоритмы построения точек и линий, принадлежащих поверхностям, наиболее часто встречающимся на практике.

#### **4.1. Моделирование линейчатых поверхностей**

К линейчатым поверхностям относятся, в частности, коническая, цилиндрическая, призматическая и пирамидальная поверхности.

Общий признак вышеперечисленных поверхностей — прямолинейность образующей.

##### **4.1.1. Моделирование конической поверхности**

Конической называется поверхность, образованная перемещением прямой (образующей), проходящей через неподвижную (собственную) точку  $F$  (вершину) и пересекающей некоторую линию  $f$  (направляющую). На эюре Монжа коническая поверхность задается проекциями репера: вершины  $F$  и направляющей  $f$  (рис. 20, *а*).

Алгоритмическая часть определителя включает в себя построение прямолинейных образующих, проходящих через вершину  $F$  и пересекающих направляющую  $f$ . На рисунке 20, *б* построена образующая  $FA$ , принадлежащая данной конической поверхности.

Для обеспечения наглядности чертежа изображают очерки поверхности и с помощью конкурирующих точек (например,  $M$  и  $N$ ) определяют видимость направляющей  $f$ .

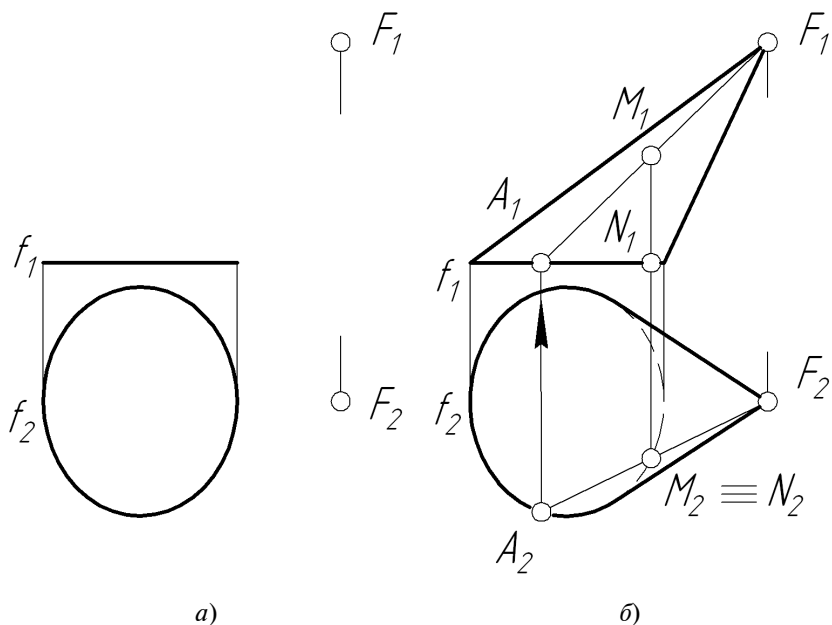


Рис. 20

### ЗАДАЧА 12

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точек  $M$  и  $N$ , принадлежащих конической поверхности  $\Sigma(T, k)$  (рис. 21, а).

#### Комментарии к решению задачи:

Для построения точек, принадлежащих линейчатым поверхностям, к которым относится коническая поверхность, в качестве вспомогательных линий построения используются прямолинейные образующие, которые проходят через вершину  $T$  и пересекают направляющую  $k$ .

Построение недостающей проекции точки  $M$  (рис. 21, б): через заданную проекцию  $M_1$  точки  $M$  из проекции  $T_1$  вершины  $T$  проводим проекцию прямолинейной образующей до пересечения с проекцией  $k_1$  направляющей  $k$ , отмечаем фронтальные проекции  $I_1$  и  $2_1$  точек пересечения образующей с направляющей. На пересечении линии связи и проекции  $k_2$  направляющей находим горизонтальные проекции этих точек:  $\bar{I}_2$  и  $2_2$ . Соединив полученные точки



6)

Построение недостающей проекции точки  $N$ : во втором поле через заданную проекцию  $N_2$  точки  $N$  из проекции  $T_2$  вершины проводим проекцию образующей до пересечения с проекцией  $k_2$  направляющей, отмечаем точку пересечения  $З_2$ . На пересечении линии связи с проекцией  $k_1$  находим фронтальную проекцию точки  $З$ . Соединив полученную точку с проекцией  $T_1$  вершины, получим фронтальную проекцию образующей  $TЗ$ , которой принадлежит заданная точка  $N$ . На пересечении линии связи, проведенной через заданную проекцию  $N_2$ , с фронтальной проекцией образующей  $TЗ$



отмечаем недостающую проекцию  $N_1$  точки  $N$ . При проецировании на плоскость  $\pi_1$  точка  $N$  невидима, так как принадлежит невидимой образующей конической поверхности (видимость вспомогательных линий построения допускается не отмечать); при проецировании на плоскость  $\pi_2$  точка  $N$  видна.

### ЗАДАЧА 13

На эюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей конической поверхности  $\Omega(T, b)$  (рис. 22, а). Определить видимость.

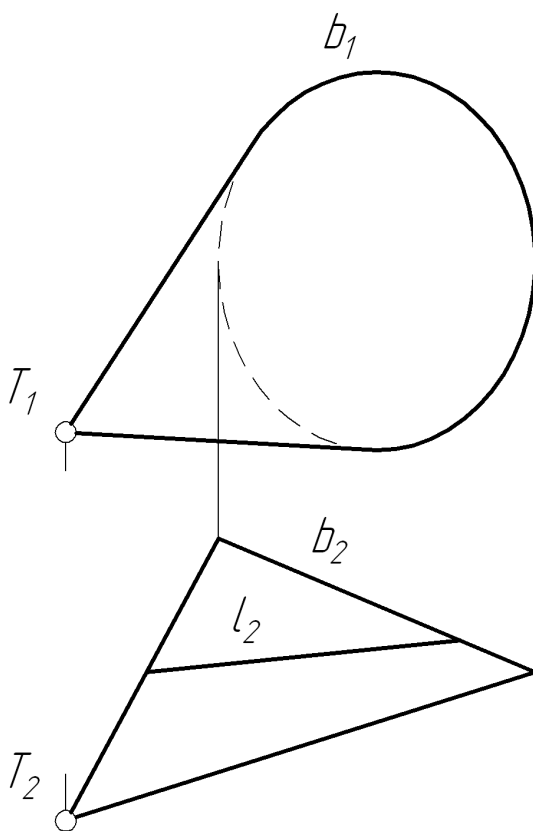


Рис. 22, а

### **Комментарии к решению задачи:**

Построение проекций линии, принадлежащей поверхности, заключается в определении проекций ряда точек, принадлежащих заданной линии. Прежде чем приступить к осуществлению алгоритма, необходимо сначала определить характер заданной линии  $l$  и наметить план решения задачи.

Если рассматривать линию  $l$  как результат пересечения горизонтально-проецирующей плоскости с заданной конической поверхностью, линия  $l$  является частью эллипса, вырожденного на горизонтальной проекции в отрезок прямой (конические сечения подробно рассмотрены в пособии [2, стр. 18]).

При решении подобных задач рекомендуется сначала определить проекции точек, принадлежащих контурным линиям, а затем найти проекции нескольких промежуточных точек.

Начнем решение задачи с построения точек  $1$  и  $2$ , принадлежащих направляющей  $b$  (рис. 22, б). Затем, используя проекцию  $3_2$  на горизонтальном очерке конической поверхности, определим недостающую проекцию  $3_1$  точки  $3$ , принадлежащей образующей  $TA$ .

Точки  $4$  и  $5$ , фронтальные проекции  $4_1$  и  $5_1$  которых принадлежат фронтальному очерку конической поверхности, являются точками изменения видимости линии  $l$  при проецировании на плоскость  $\pi_1$ . Для их построения необходимо найти горизонтальные проекции  $T_2C_2$  и  $T_2D_2$  образующих, которым они принадлежат, отметить точки пересечения  $4_2$  и  $5_2$  проекций этих образующих с проекцией  $l_2$ , а затем определить проекции точек  $4$  и  $5$  в первом поле.

Для более точного построения эллиптической кривой нужно определить проекции еще нескольких точек. Точки  $6$  и  $7$  построены с использованием образующих  $TE$  и  $TF$ , проекции которых в поле  $\pi_2$  совпадают, соответственно, с проекциями образующих  $TC$  и  $TD$  (рис. 22, в). Для построения остальных промежуточных точек выбраны произвольные образующие. Соединив все полученные точки, получим фронтальную проекцию  $l_1$  кривой  $l$ , принадлежащей конической поверхности  $\Omega(T, b)$ .

Для определения видимости кривой  $l$  при проецировании на плоскость проекций  $\pi_1$  использованы горизонтальные проекции конкурирующих точек  $3$  и  $M$ , принадлежащих, соответственно, образующим  $TA$  и  $TG$ , проекции которых совпадают в поле  $\pi_1$ . По

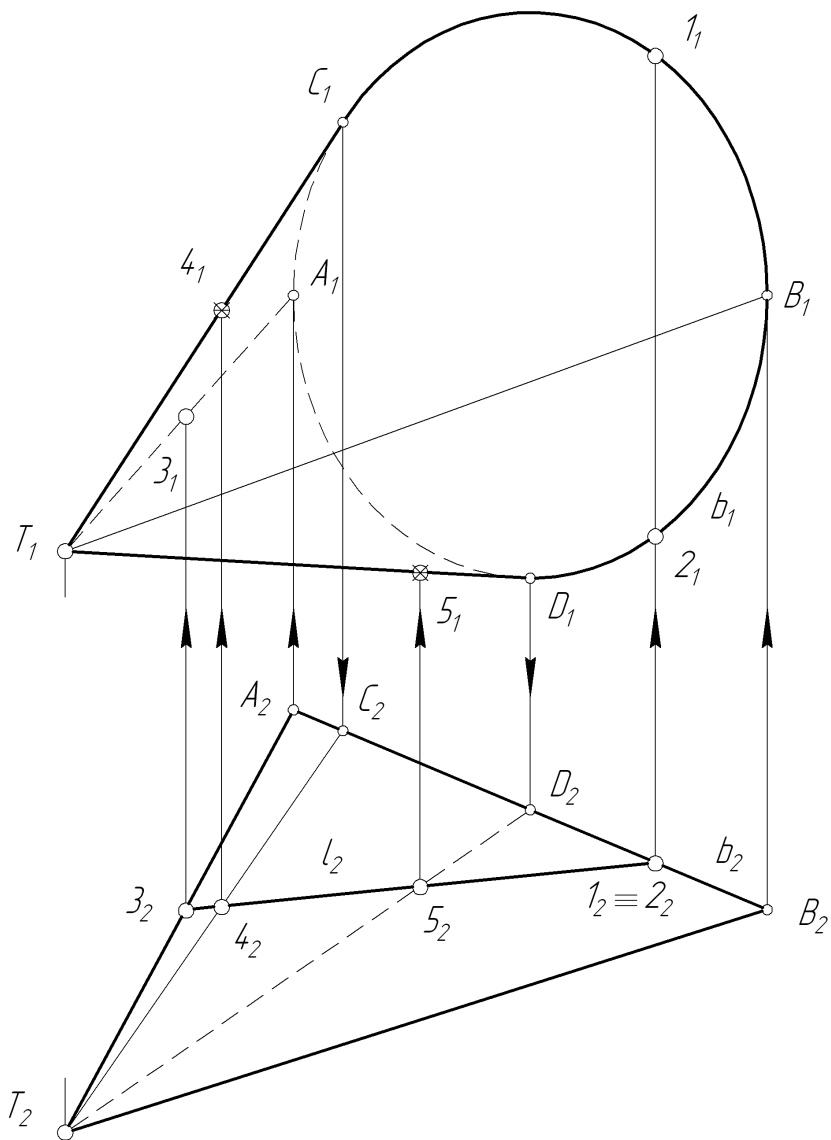


Рис. 22, б

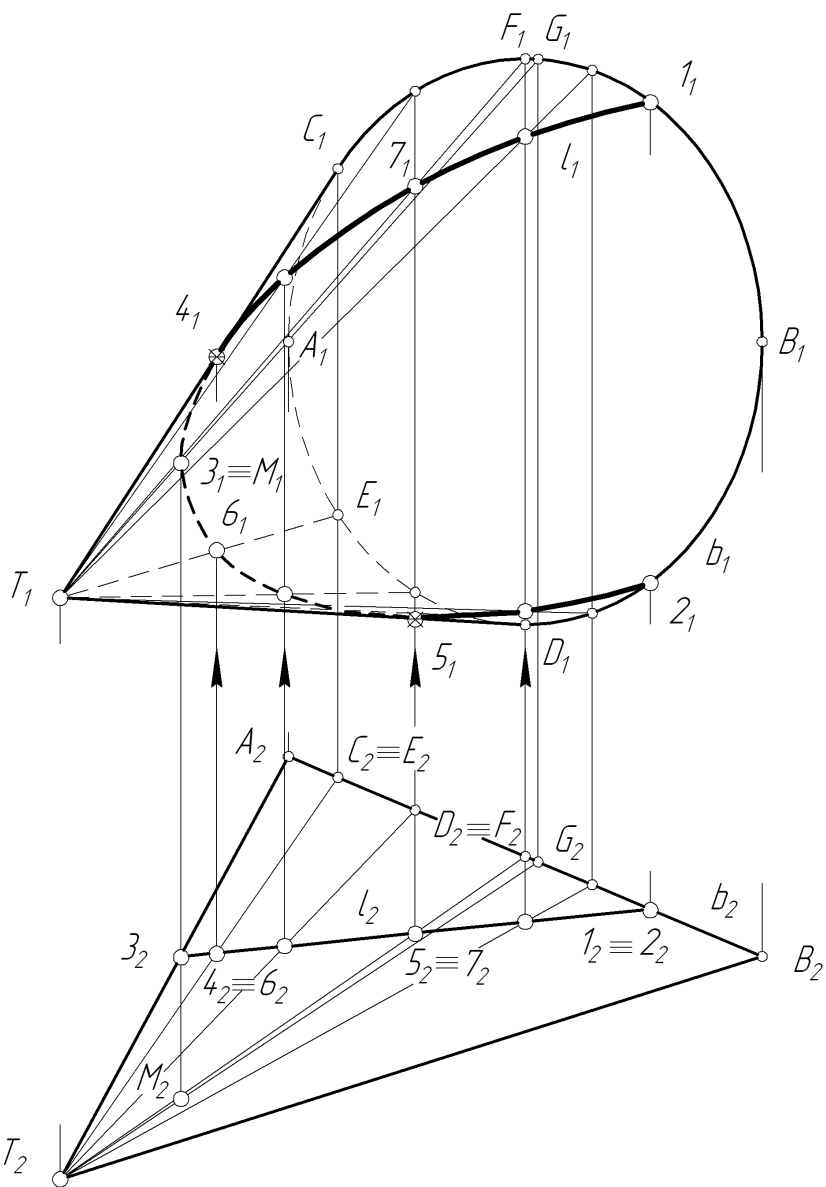


Рис. 22, в

горизонтальным проекциям точек  $3$  и  $M$  видно, что точка  $3$ , по отношению к наблюдателю, расположена за точкой  $M$ . Следовательно, точка  $3$  принадлежит невидимой части поверхности, поэтому участок линии  $l$ , включающий точку  $3$ , будет невидимым (на рисунке он отмечен штриховой линией).

### ЗАДАЧА 14

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей конической поверхности  $\Sigma(T, f)$  (рис. 23,  $a$ ). Определить видимость.

#### **Комментарии к решению задачи:**

Заданная линия  $l$  состоит из двух сегментов. Каждый сегмент можно рассматривать как часть линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости с поверхностью прямого кругового конуса (рис. 23,  $b$ ).

Плоскость  $\alpha$  пересекает заданную поверхность по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проекций  $\pi_2$ , поэтому сегмент  $\{1, 2, 3\}$  во втором поле проецируется в дугу окружности, для построения которой не требуется промежуточных точек.

В сечении конической поверхности плоскостью  $\beta$  получается парабола (конические сечения подробно рассмотрены в пособии [2, стр. 18]). Для построения горизонтальной проекции параболы необходимо найти проекции нескольких промежуточных точек. В качестве вспомогательных линий при построении точек, принадлежащих

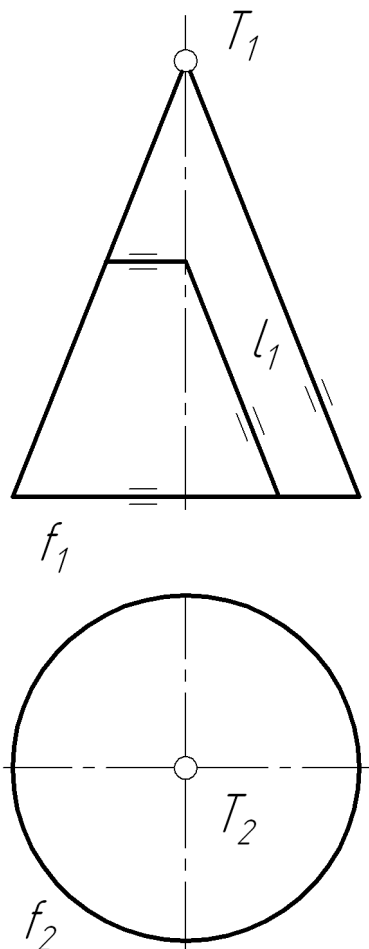


Рис. 23,  $a$

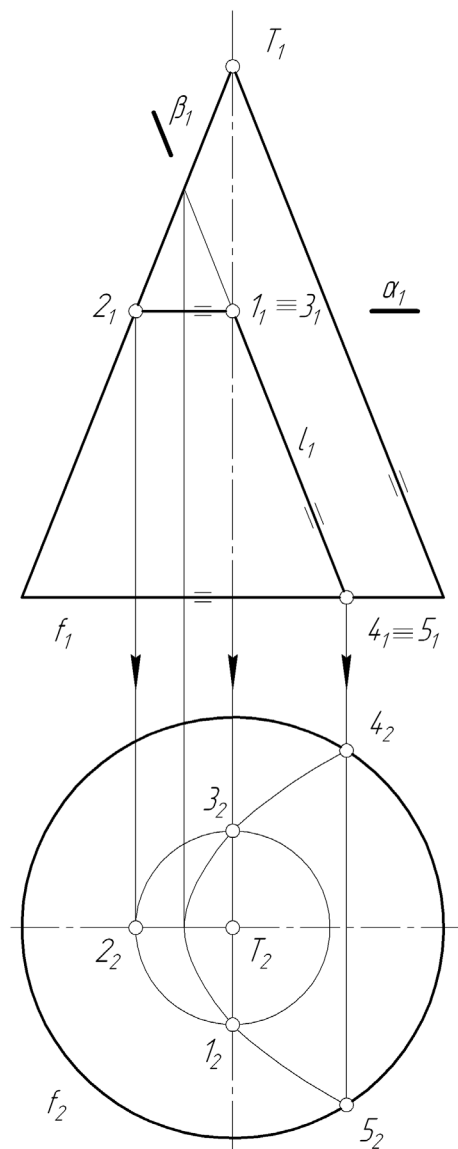


Рис. 23, б

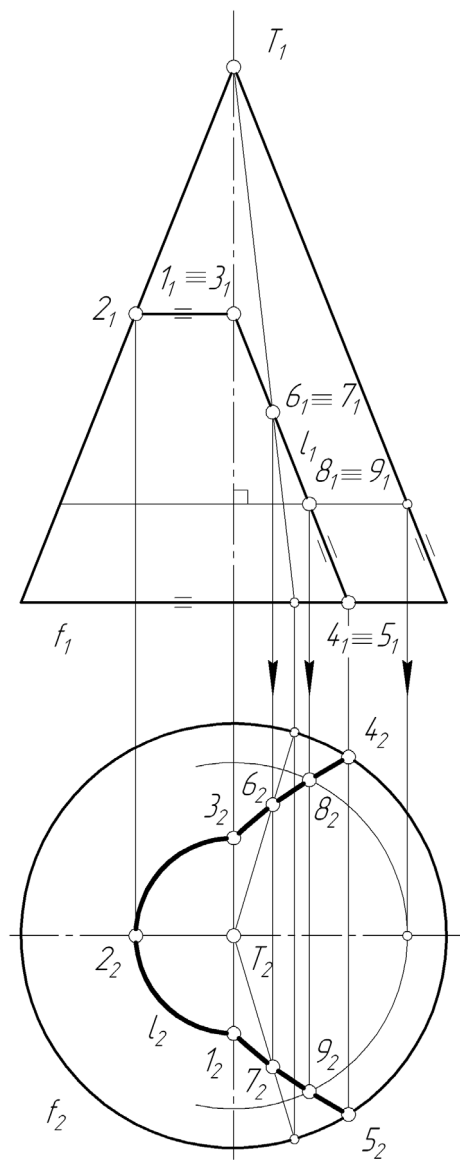


Рис. 23, в

данной поверхности, можно выбрать либо прямые-образующие, либо окружности (рис. 23, *в*). Решением задачи является проекция  $l_2$  линии  $l$ , полностью видимой при проецировании на плоскость проекций  $\pi_2$ .

#### 4.1.2. Моделирование цилиндрической поверхности

Цилиндрической называется поверхность, образованная перемещением прямой (образующей), проходящей через неподвижную бесконечно удаленную (несобственную) точку  $F$  (вершину) и пересекающей некоторую линию  $f$  (направляющую). На эпюре Монжа цилиндрическая поверхность задается проекциями репера: вершины  $F$  и направляющей  $f$  (рис. 24, *а*).

Алгоритмическая часть определителя включает в себя построение прямолинейных образующих, проходящих через бесконечно удаленную вершину  $F$  и пересекающих направляющую  $f$  (все образующие цилиндрической поверхности параллельны направлению на вершину). На рисунке 24, *б* построена образующая  $FA$ , принадлежащая данной цилиндрической поверхности.

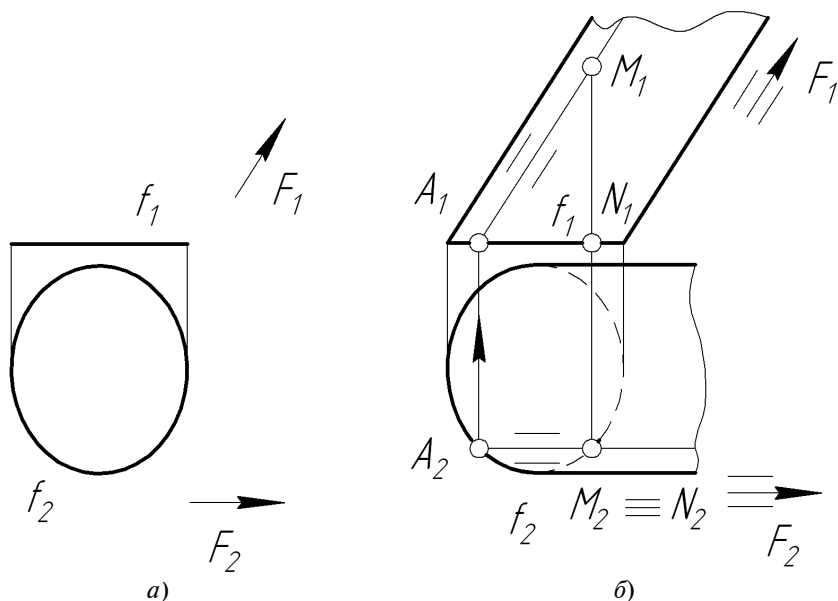


Рис. 24



Для обеспечения наглядности чертежа изображают очерки поверхности и с помощью конкурирующих точек (например,  $M$  и  $N$ ) определяют видимость направляющей  $f$ . Верхнее основание цилиндрической поверхности допускается не изображать.

Сравнив рисунки 20,  $a$ ,  $b$  и 24,  $a$ ,  $b$ , можно сделать вывод, что в случае удаления вершины в бесконечность, коническая поверхность трансформируется в цилиндрическую.

Если вершина цилиндрической поверхности совмещена с одним из центров проецирования, образуется проецирующая цилиндрическая поверхность, которая на одной из плоскостей проекций проецируется в линию (вырожденную проекцию).

Образующая  $s$  проецирующей цилиндрической поверхности  $\Sigma(F, a)$  — горизонтально-проецирующая прямая (рис. 25,  $a$ ); об-

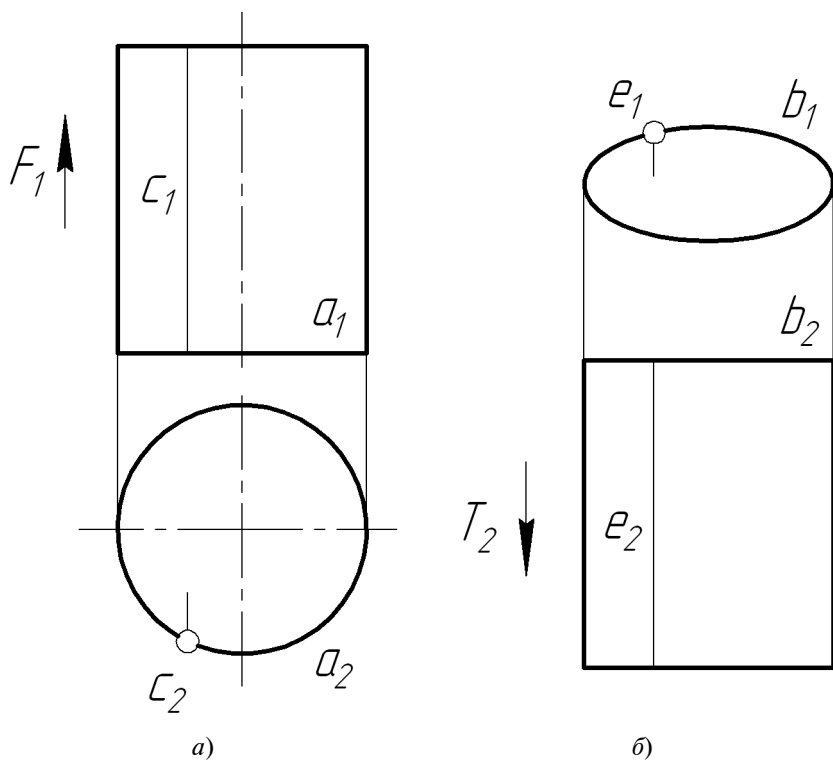


Рис. 25

разующая  $e$  проецирующей цилиндрической поверхности  $\Omega(T, b)$  — фронтально-проецирующая прямая (рис. 25, б).

### ЗАДАЧА 15

На эюре Монжа построить недостающие проекции точки  $S$ , принадлежащей цилиндрической поверхности  $\Psi(T, b)$  (рис. 26, а).

#### **Комментарии к решению задачи:**

Для построения точек, принадлежащих линейчатым поверхностям, к которым относится цилиндрическая поверхность, в качестве вспомогательных линий построения используются прямолинейные образующие, которые проходят через бесконечно удаленную вершину  $T$  и пересекают направляющую  $b$ .

Построение недостающей проекции точки  $S$  (рис. 26, б): в первом поле через заданную проекцию  $S_1$  точки  $S$  проводим образую-

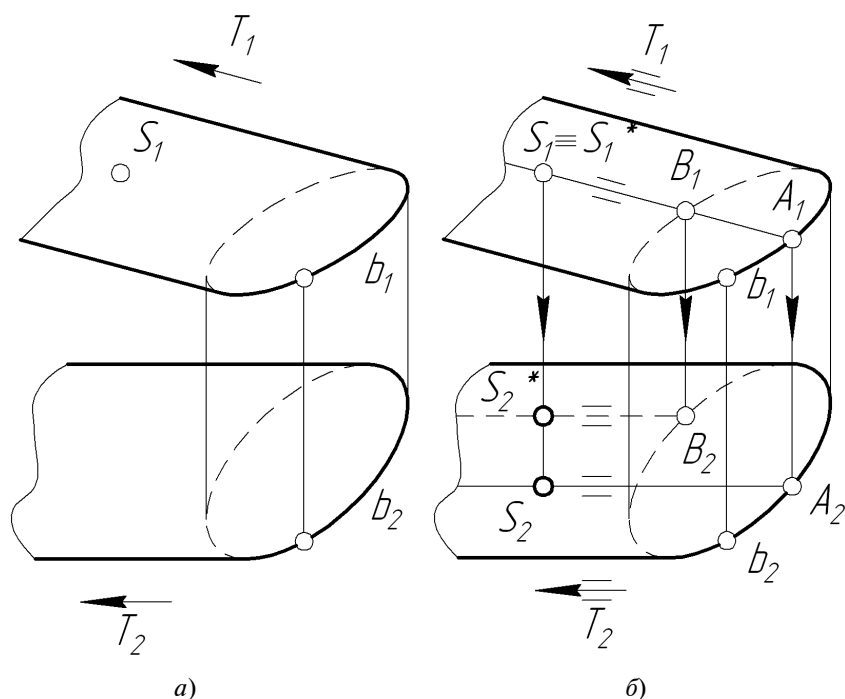


Рис. 26

щую, параллельную направлению на проекцию  $T_1$  вершины цилиндрической поверхности, до пересечения с проекцией  $b_1$  направляющей  $b$ , отмечаем точки пересечения  $A_1$  и  $B_1$ . На пересечении линий связи с проекцией  $b_2$  направляющей находим горизонтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  этих точек. Горизонтальные проекции образующих  $TA$  и  $TB$ , которым может принадлежать заданная точка  $S$ , параллельны направлению на проекцию  $T_2$  вершины цилиндрической поверхности. На линии связи отмечаем горизонтальные проекции точек  $S$  и  $S^*$ , принадлежащих, соответственно, образующим  $TA$  и  $TB$ . При проецировании на фронтальную плоскость проекции видимой  $S$  и невидимой  $S^*$  точек совпадают. При проецировании на плоскость  $\pi_2$  точка  $S$  является видимой, а  $S^*$  — невидимой.

### ЗАДАЧА 16

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $s$ , принадлежащей цилиндрической поверхности  $\Theta(F, a)$  (рис. 27, а). Определить видимость.

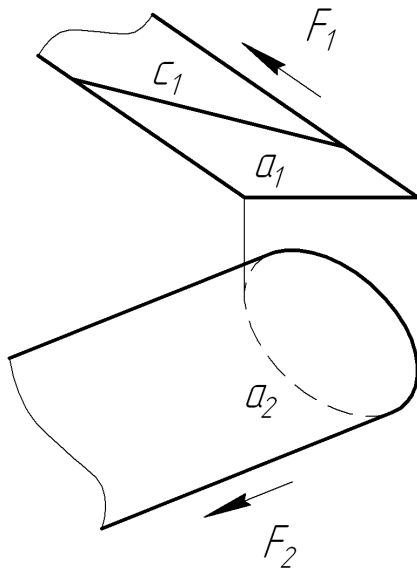


Рис. 27, а

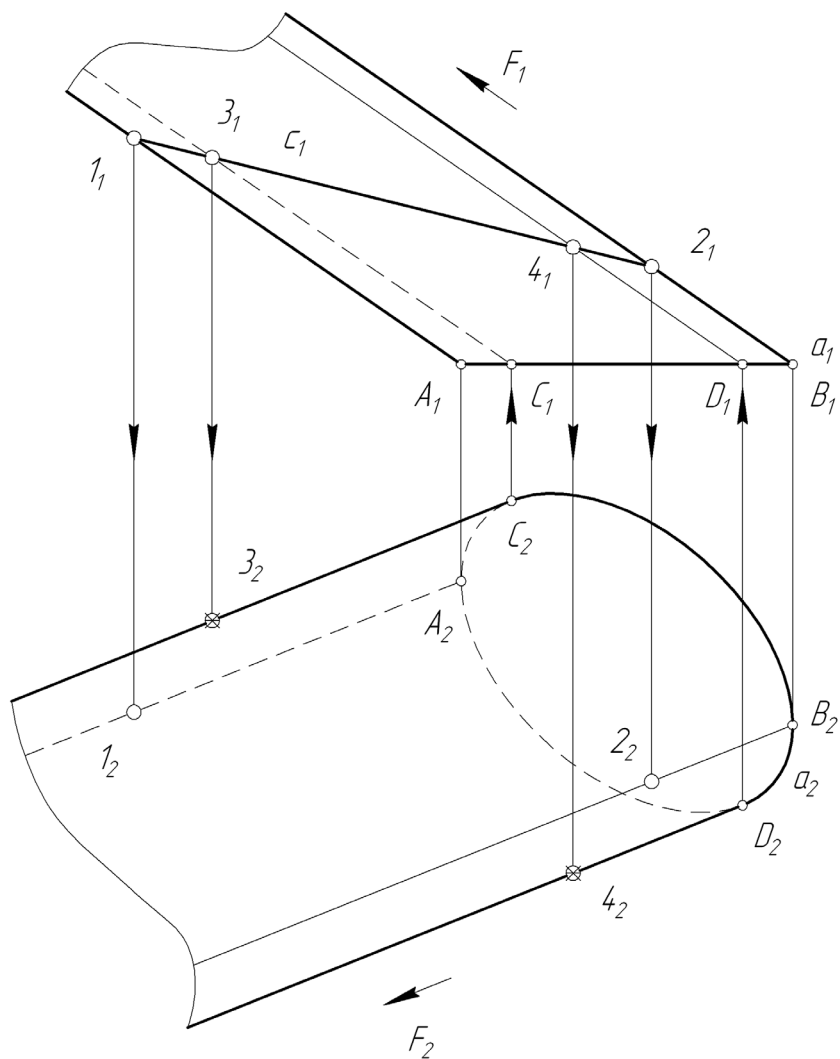


Рис. 27, б

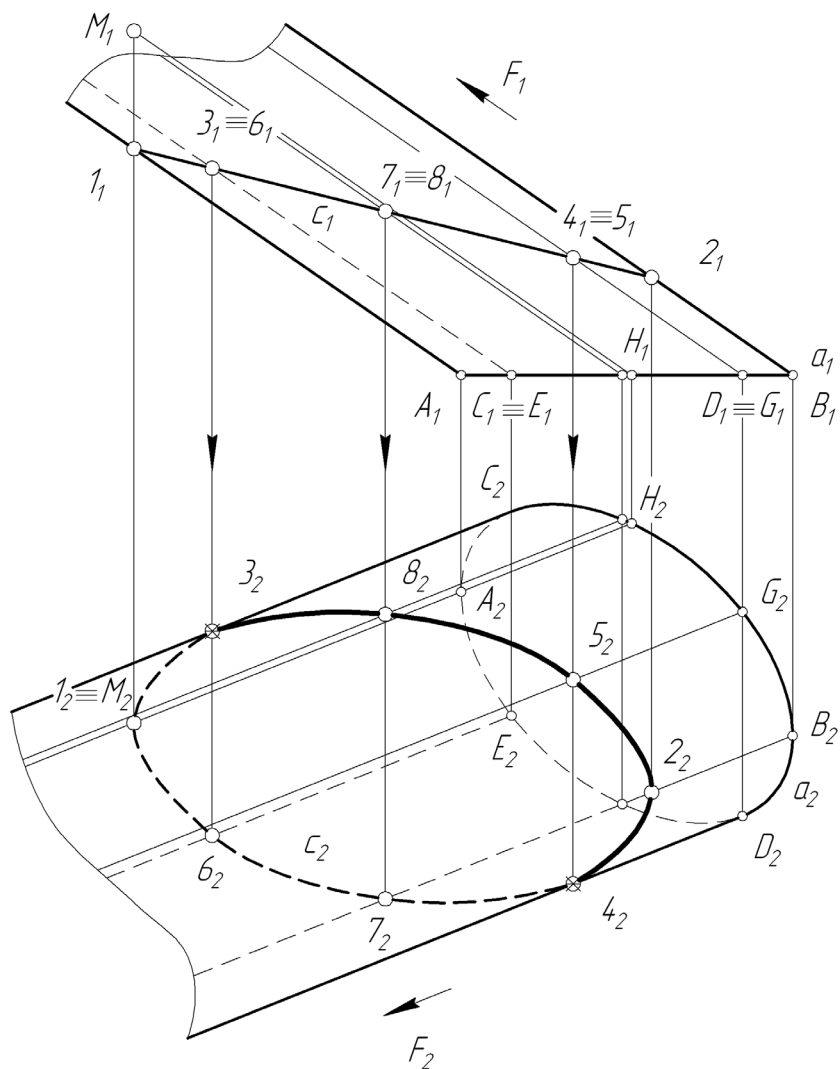


Рис. 27, в

### **Комментарии к решению задачи:**

Если рассматривать линию  $c$  как результат пересечения фронтально-проецирующей плоскости с заданной цилиндрической поверхностью, линия  $c$  является эллипсом, вырожденным в первом поле в отрезок прямой.

Начнем решение задачи с построения точек  $1$  и  $2$  (рис. 27, б), принадлежащих образующим  $FA$  и  $FB$ , фронтальные проекции которых являются частью фронтального очерка заданной цилиндрической поверхности.

Точки  $3$  и  $4$ , горизонтальные проекции которых  $3_2$  и  $4_2$  принадлежат горизонтальному очерку цилиндрической поверхности, являются точками изменения видимости линии  $c$  при проецировании на плоскость  $\pi_2$ . Для их построения необходимо найти фронтальные проекции  $F_1C_1$  и  $F_1D_1$  образующих, которым они принадлежат, отметить точки пересечения  $3_1$  и  $4_1$  проекций этих образующих с проекцией  $c_1$  заданной линии  $c$ , а затем определить горизонтальные проекции  $3_2$  и  $4_2$  точек  $3$  и  $4$ .

Для более точного построения эллипса нужно определить проекции еще нескольких точек. Точки  $5$  и  $6$  построены с использованием образующих  $FE$  и  $FG$ , совпадающих в поле  $\pi_1$ , соответственно, с проекциями образующих  $FC$  и  $FD$  (рис. 27, в). Для построения промежуточных точек  $7$  и  $8$  выбраны произвольные образующие. Соединив все полученные точки, получим горизонтальную проекцию  $c_2$  кривой  $c$ , принадлежащей цилиндрической поверхности  $\Theta(F, a)$ .

Для определения видимости кривой  $c$  при проецировании на плоскость проекций  $\pi_2$  использованы фронтальные проекции конструирующих точек  $1$  и  $M$ , принадлежащих, соответственно, образующим  $FA$  и  $FH$ , проекции которых совпадают в поле  $\pi_2$ .

#### **4.1.3. Моделирование призматической поверхности**

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямой (образующей), проходящей через неподвижную бесконечно удаленную (несобственную) точку  $F$  (вершину) и пересекающей направляющую  $f$  — ломаную линию.

Модель призматической поверхности  $\Delta(F, f)$ , построенная по методу Монжа, представлена на рисунке 28, а.

Алгоритмическая часть определителя включает в себя построение прямолинейных образующих, проходящих через бесконечно

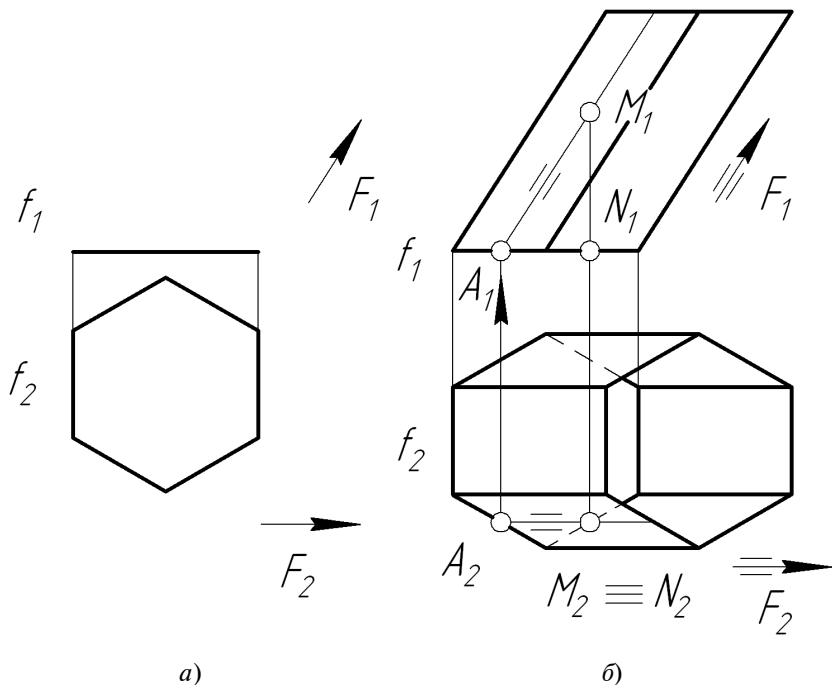


Рис. 28

удаленную вершину  $F$  и пересекающих направляющую  $f$  (все образующие призматической поверхности параллельны направлению на вершину). На рисунке 28, б построена образующая  $FA$ , принадлежащая данной призматической поверхности.

Для обеспечения наглядности чертежа изображены проекции всех ребер призматической поверхности (с учетом видимости) и отмечена видимость направляющей  $f$ . Видимость направляющей определена с помощью конкурирующих точек  $M$  и  $N$ .

Если вершина призматической поверхности совмещена с одним из центров проецирования, образуется проецирующая призматическая поверхность, которая на одной из плоскостей проекций проецируется в линию (вырожденную проекцию). Призматическая поверхность, проецирующая по отношению к плоскости  $\pi_1$ , изображена на рисунке 29, ее образующая  $l$  — фронтально-проецирующая прямая.

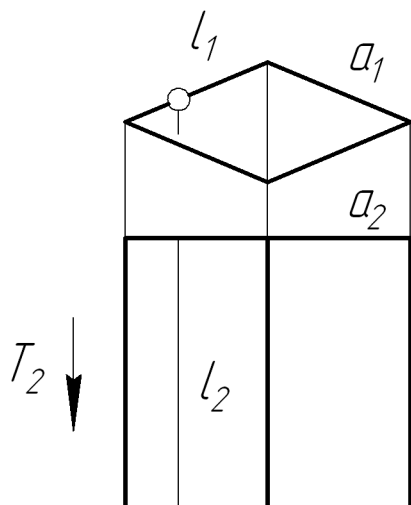


Рис. 29

### ЗАДАЧА 17

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точки  $M$ , принадлежащей призматической поверхности  $\Sigma(F, a)$  (рис. 30, а).

**Комментарии к решению задачи:**

Прежде чем приступить к решению задачи, для удобства обозначим вершины основания многогранника:  $A, B, C, D$  (рис. 30, б).

В данном примере рассмотрены два варианта построения возможных фронтальных проекций точки  $M$ . Способ построения недостающей проекции точки  $M$ , принадлежащей призматической поверхности  $\Sigma(F, a)$ , с помощью прямолинейных образующих  $F1$  и

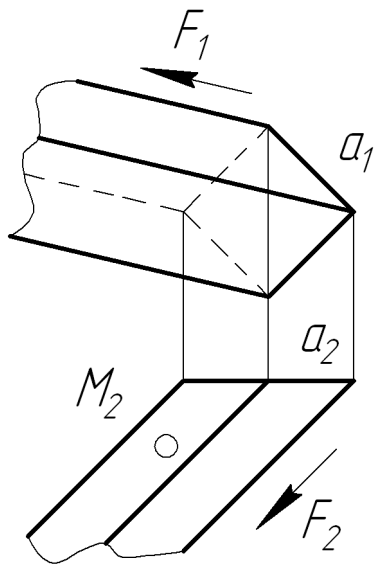


Рис. 30, а



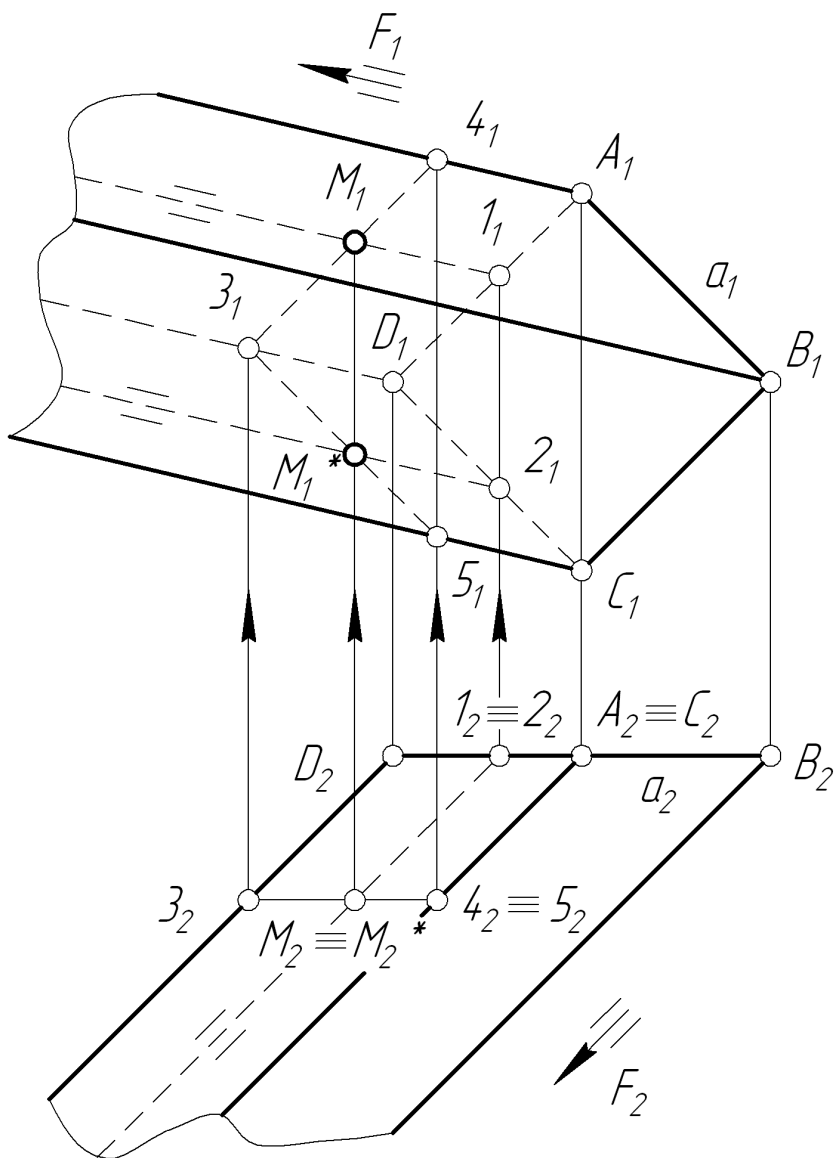


Рис. 30, б

$F2$  аналогичен построениям точки, принадлежащей цилиндрической поверхности.

Во втором способе решение сводится к построению проекций точек, принадлежащих плоскостям  $ADF$  и  $CDF$ , с помощью произвольных вспомогательных прямых  $34$  и  $35$ , принадлежащих соответствующим граням призматической поверхности.

При проецировании на горизонтальную плоскость проекции проекции видимой  $M$  и невидимой  $M^*$  точек совпадают. При проецировании на плоскость  $\pi_1$  обе точки являются невидимыми.

### ЗАДАЧА 18

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей призматической поверхности  $\Omega(T, ABC)$  (рис. 31,  $a$ ). Определить видимость.

#### **Комментарии к решению задачи:**

Если рассматривать линию  $l$  как результат пересечения горизонтально-проецирующей плоскости с заданной призматической поверхностью, линия  $l$  является незамкнутой ломаной, вырожден-

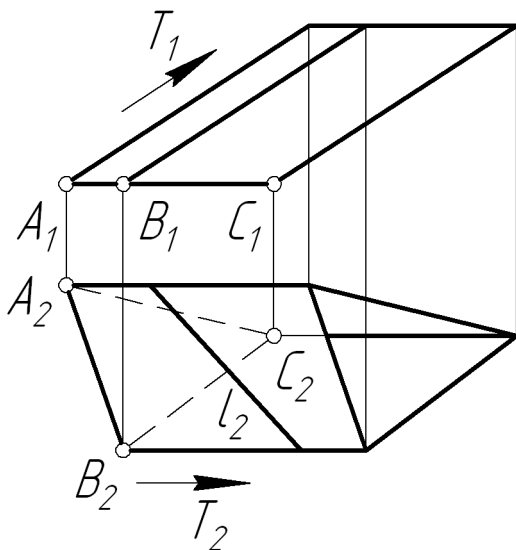


Рис. 31,  $a$

ной во втором поле в отрезок прямой. Все сегменты ломаной  $l$  прямолинейны, поэтому для построения проекции  $l_1$  нужно использовать только четыре точки: 1, 2, 3, 4 (их горизонтальные проекции лежат на пересечении проекции  $l_2$  заданной линии  $l$  с проекцией  $A_2B_2C_2$  направляющей и проекциями  $T_2A_2$  и  $T_2B_2$  ребер) (рис. 31, б).

Фронтальные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются из условия их принадлежности соответствующим линиям: точка 1 принадлежит ребру  $TA$ , точка 2 — отрезку  $AC$  направляющей, точка 3 — отрезку  $BC$  направляющей, точка 4 — ребру  $TB$ . Соединять полученные точки нужно, учитывая их принадлежность определенным

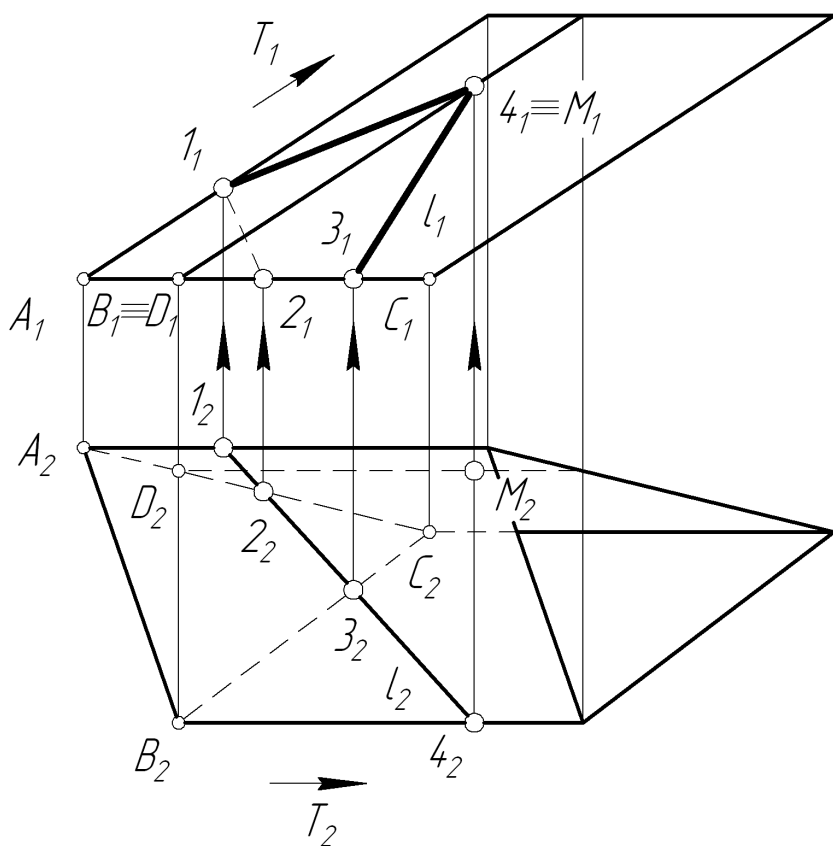


Рис. 31, б

граням призматической поверхности: отрезок  $12$  лежит в плоскости  $ACT$ , отрезок  $14$  — в плоскости  $ABT$ , отрезок  $34$  — в плоскости  $BCT$ .

При проецировании на фронтальную плоскость проекций точкой изменения видимости линии  $l$  является точка  $1$ . Для определения видимости кривой  $l$  при проецировании на плоскость проекций  $\pi_1$  использованы горизонтальные проекции конкурирующих точек  $4$  и  $M$ , принадлежащих, соответственно, образующим  $TB$  и  $TD$ , проекции которых совпадают в поле  $\pi_1$ .

#### 4.1.4. Моделирование пирамидальной поверхности

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямой (образующей), проходящей через неподвижную (собственную) точку  $F$  (вершину) и пересекающей направляющую  $f$  — ломаную линию.

Модель пирамидальной поверхности  $\Sigma(F, f)$ , построенная по методу Монжа, представлена на рисунке 32, *а*. Алгоритмическая часть

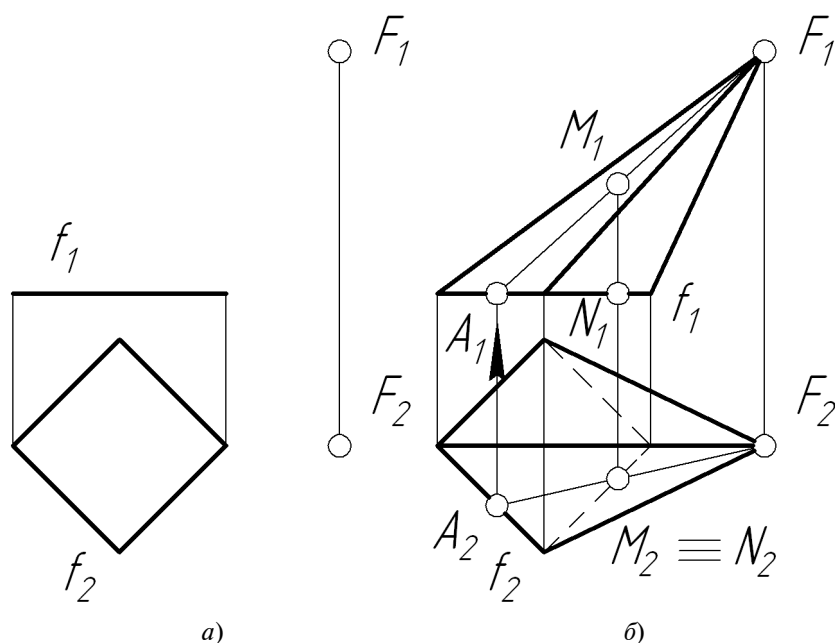


Рис. 32

определителя включает в себя построение прямолинейных образующих, проходящих через вершину  $F$  и пересекающих направляющую  $f$ . На рисунке 32, б построена образующая  $FA$ , принадлежащая данной призматической поверхности. Для обеспечения наглядности чертежа изображены ребра пирамидальной поверхности (с учетом видимости) и отмечена видимость направляющей  $f$ . Видимость направляющей определена с помощью конкурирующих точек  $M$  и  $N$ .

Сравнив рисунки 28, а, б и 32, а, б, можно сделать вывод, что в случае удаления вершины в бесконечность, пирамидальная поверхность трансформируется в призматическую.

### ЗАДАЧА 19

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точки  $M$ , принадлежащей пирамидальной поверхности  $\Omega(T, ABCD)$  (рис. 33, а).

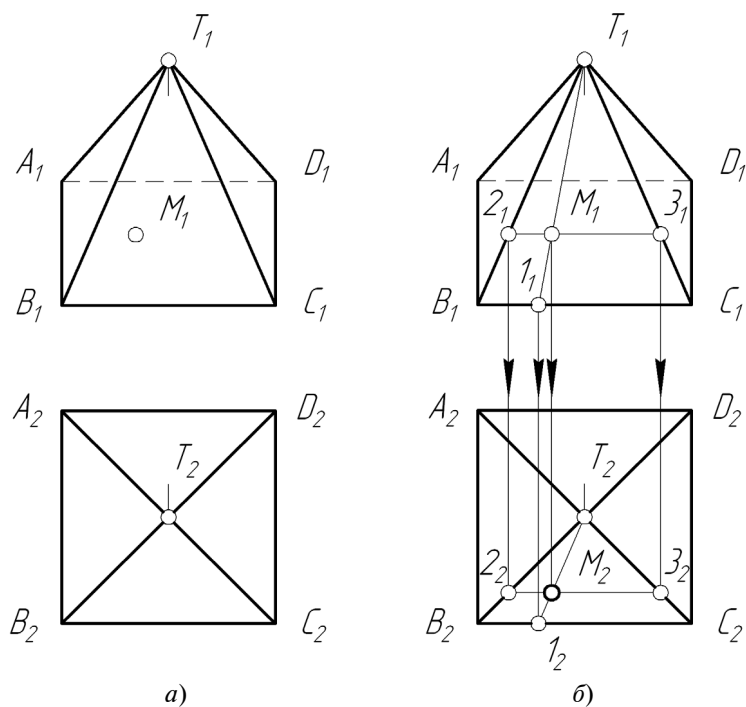


Рис. 33

### Комментарии к решению задачи:

Для построения горизонтальной проекции  $M_2$  точки  $M$  можно использовать прямолинейную образующую  $T_1$  пирамидальной поверхности  $\Omega(T, ABCD)$  или произвольную вспомогательную прямую, принадлежащую грани  $BCT$  и проходящую через точку  $M$ , например, прямую  $23$  (рис. 33, б). Точка  $M$  видна при проецировании на обе плоскости проекций, так как она принадлежит грани  $BTC$ , видимой как при проецировании на плоскость  $\pi_1$ , так и на плоскость  $\pi_2$ .

### ЗАДАЧА 20

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей пирамидальной поверхности  $\Psi(T, ABC)$  (рис. 34, а). Определить видимость.

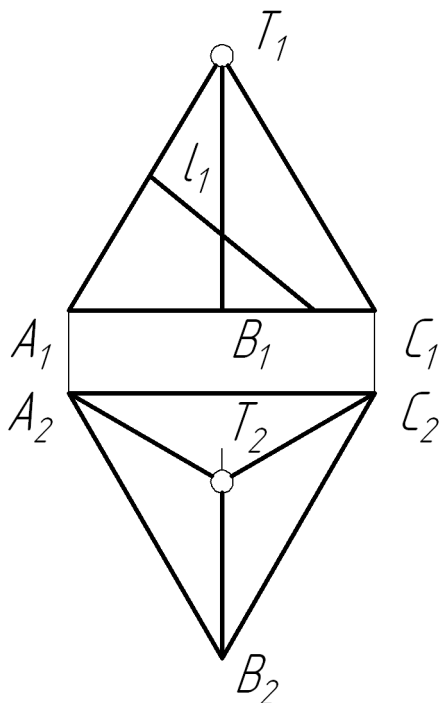


Рис. 34, а

### Комментарии к решению задачи:

Если рассматривать линию  $l$  как результат пересечения фронтально-проецирующей плоскости с заданной пирамидальной поверхностью, линия  $l$  является незамкнутой ломаной, вырожденной в первом поле в отрезок прямой. Все сегменты ломаной  $l$  прямолинейны, поэтому для построения проекции  $l_2$  заданной линии  $l$  нужно использовать только четыре точки: 1, 2, 3, 4 (их фронтальные проекции лежат на пересечении проекции  $l_1$  с проекцией  $A_1B_1C_1$  направляющей и проекциями  $T_1A_1$  и  $T_1B_1$  ребер пирамидальной поверхности) (рис. 34, б).

Горизонтальные проекции этих точек определяются из условия их принадлежности

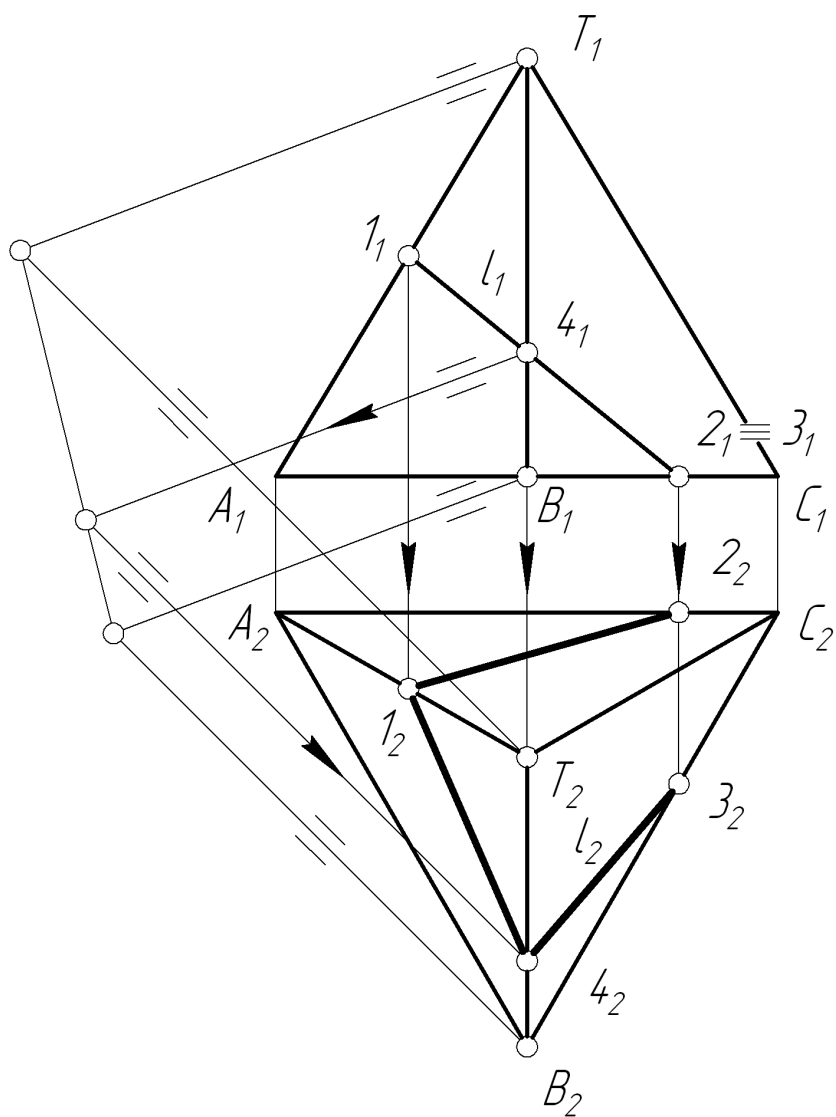


Рис. 34, б

соответствующим прямым: точка 1 принадлежит ребру  $TA$ , точка 2 — отрезку  $AC$  направляющей, точка 3 — отрезку  $BC$  направляющей, точка 4 — ребру  $TB$ . Так как ребро  $TB$  является отрезком профильной прямой, для построения недостающей проекции точки 4 используем способ, рассмотренный в *Задаче 4*.

Соединять полученные точки ломаной линии нужно, учитывая их принадлежность определенным граням пирамидальной поверхности: отрезок  $12$  лежит в плоскости  $ACT$ , отрезок  $14$  — в плоскости  $ABT$ , отрезок  $34$  — в плоскости  $BCT$ . При проецировании на горизонтальную плоскость проекций линия  $l$  видима полностью.

## 4.2. Моделирование поверхностей вращения

Поверхности, образованные в результате вращения какой-либо линии (образующей) вокруг неподвижной оси, называются поверхностями вращения.

На эпюре Монжа поверхность вращения задается проекциями репера: образующей  $m$  и оси вращения  $i$  (рис. 35, *а*). Обычно поверхность располагают так, чтобы ее ось была перпендикулярна одной из плоскостей проекций.

Каждая точка образующей описывает при вращении окружность с центром на оси вращения  $i$ . Эти окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения  $i$ , называются параллелями (рис. 35, *б*). В рассмотренном примере ось вращения  $i$  перпендикулярна плоскости  $\pi_2$ , поэтому параллели изображаются во фронтальной плоскости проекций в виде отрезков прямых, а на горизонтальную плоскость проецируются без искажения в виде окружностей. Наибольшая параллель  $e$  называется экватором поверхности, наименьшая  $g$  — горлом. Построение параллелей, принадлежащих поверхности вращения, является алгоритмической частью определителя. На рисунке 35, *б* построена параллель  $p$ , принадлежащая данной поверхности вращения: через проекцию  $A_1$  точки  $A$ , принадлежащей образующей  $m$ , проведена проекция  $p_1$  параллели  $p$  (перпендикулярно проекции  $i_1$  оси вращения  $i$ ). Горизонтальная проекция точки  $A$  определена из условия ее принадлежности образующей  $m$ . Точка  $A$ , вращаясь вокруг оси вращения  $i$ , описывает окружность  $p$  радиуса  $R_A$  с центром  $O$ , лежащим на оси



вращения  $i$ . Параллель  $p$  проецируется без искажения на горизонтальную плоскость в виде окружности  $p_2$ .

Кривые, которые образуются в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось вращения  $i$ , называются меридианами.

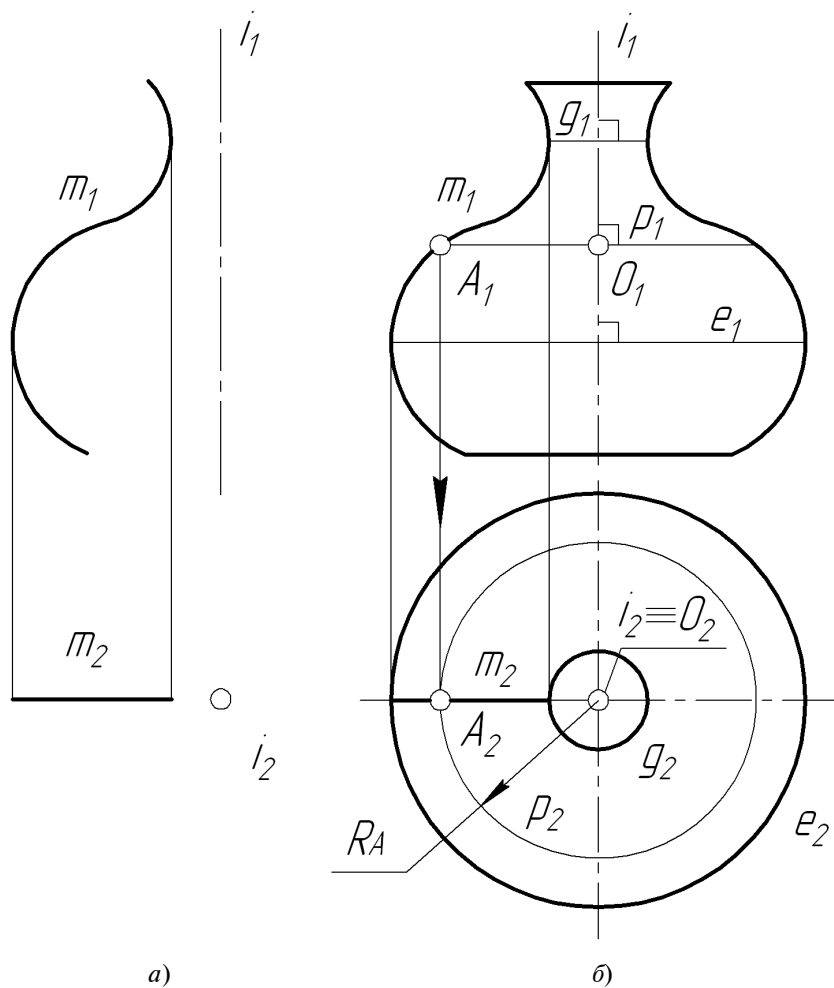


Рис. 35

Для обеспечения наглядности чертежа изображают очерки поверхности. Горизонтальные проекции  $e_2$  экватора и  $g_2$  горла определяют горизонтальный очерк поверхности, а фронтальная проекция главного меридиана, расположенного в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, — фронтальный очерк.

В зависимости от вида образующей линии можно получить различные поверхности вращения. Образование частных видов поверхностей вращения подробно рассмотрено в учебнике [8, стр. 111].

В инженерной практике часто встречаются поверхности вращения, модели которых приведены на рисунке 36.

Поверхность сферы образуется при вращении окружности вокруг какого-либо ее диаметра. Торковая поверхность образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. При вращении эллипса вокруг его оси образуется эллипсоид вращения. Образующей поверхности глобоида является дуга окружности.

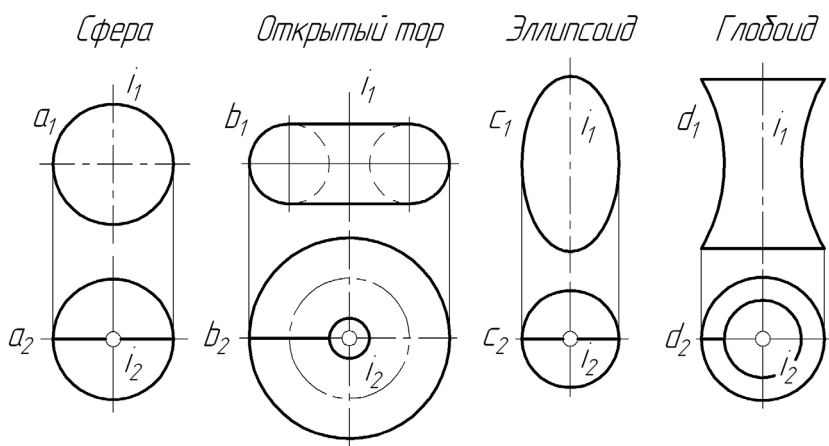


Рис. 36

## ЗАДАЧА 21

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точек  $L$ ,  $M$  и  $N$ , принадлежащих сферической поверхности  $\Sigma(i, k)$  (рис. 37,  $a$ ).

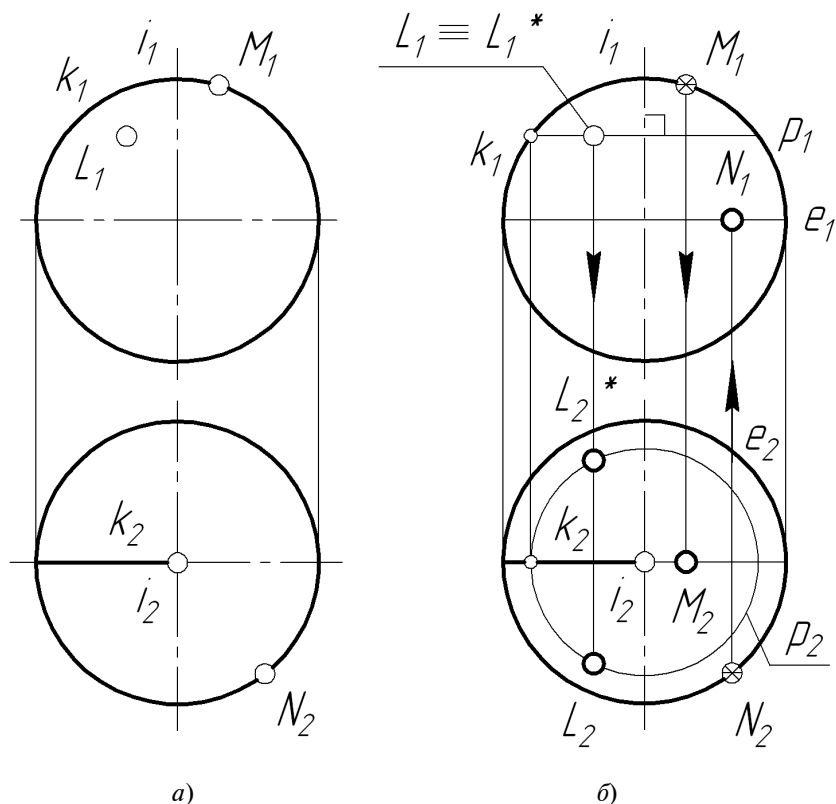


Рис. 37

**Комментарии к решению задачи:**

В качестве вспомогательных линий для построения точек, принадлежащих поверхностям вращения, к которым относится сферическая поверхность, используют окружности—параллели.

Построение недостающей проекции точки  $L$ , принадлежащей сферической поверхности (рис. 37, б): через заданную проекцию  $L_1$  точки  $L$  проводим проекцию  $p_1$  вспомогательной параллели  $p$ , которая на фронтальной плоскости проекций изображается в виде отрезка прямой. Строим вторую проекцию параллели  $p$ , которая на горизонтальной проекции проецируется в окружность  $p_2$ . На пересечении линий связи с проекцией  $p_2$  отмечаем горизонтальные

проекции  $L_2$  и  $L_2^*$  точек  $L$  и  $L^*$ , принадлежащих параллели  $p$ . При проецировании на фронтальную плоскость проекций проекции видимой  $L$  и невидимой  $L^*$  точек совпадают. При проецировании на плоскость  $\pi_2$  обе построенные точки являются видимыми.

Недостающие проекции точек  $M$  и  $N$  определяются из условия их принадлежности, соответственно, главному меридиану и экватору  $e$ . Точка  $M$  является точкой изменения видимости при проецировании на плоскость проекций  $\pi_1$ , так как ее фронтальная проекция лежит на фронтальном очерке сферической поверхности. При проецировании на горизонтальную плоскость проекций точка  $M$  видна. Точка  $N$  является точкой изменения видимости при проецировании на плоскость  $\pi_2$ , так как лежит на горизонтальном очерке  $e_2$ . При проецировании на фронтальную плоскость проекций точка  $N$  видна.

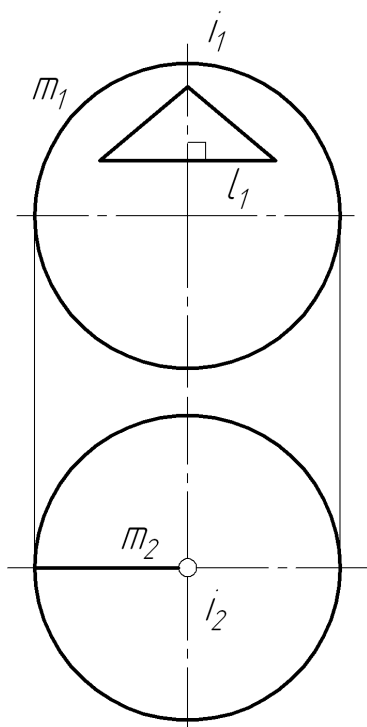


Рис. 38, а

## ЗАДАЧА 22

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей сферической поверхности  $\Omega(i, m)$  (рис. 38, а). Определить видимость.

### *Комментарии к решению задачи:*

Линия  $l$  состоит из нескольких сегментов. Каждый сегмент можно рассматривать как часть линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости со сферической поверхностью (рис. 38, б).

Плоскость  $\alpha$  пересекает заданную сферическую поверхность по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проекций  $\pi_2$ , поэтому сегменты  $AC$  и  $BD$  во втором поле проецируются в дуги окружности, для построения которых не требуется промежуточных точек.

В сечении сферической поверхности плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$  также получаются окружности, но они

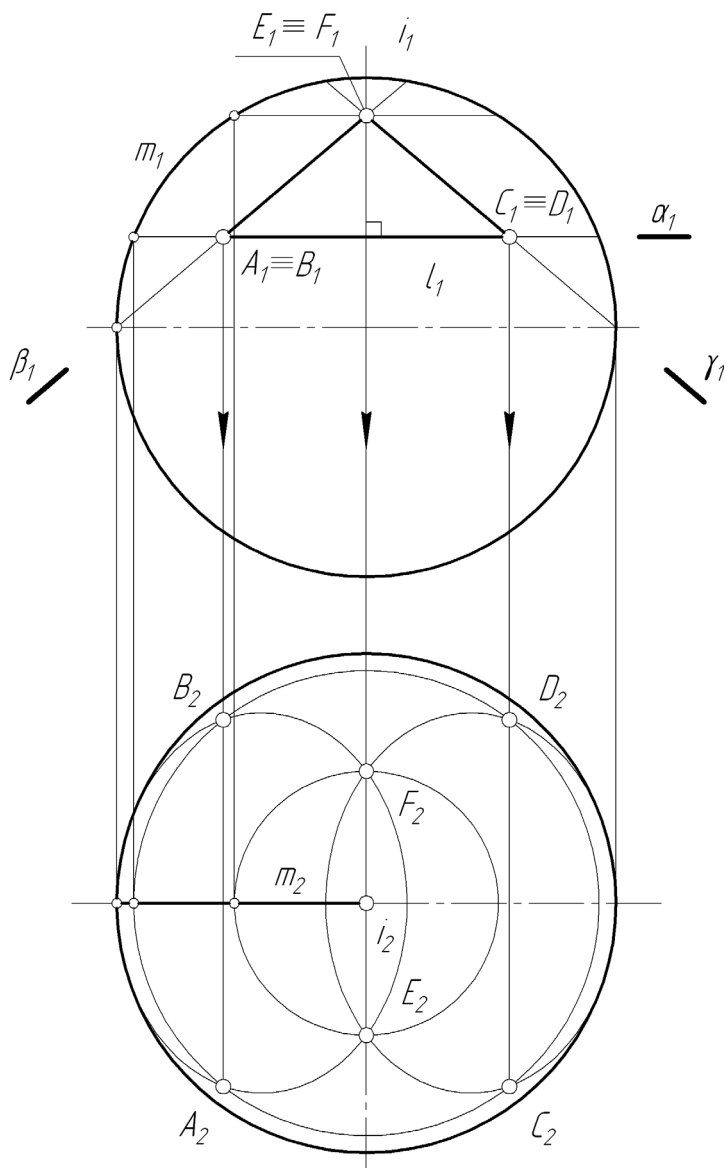


Рис. 38, б

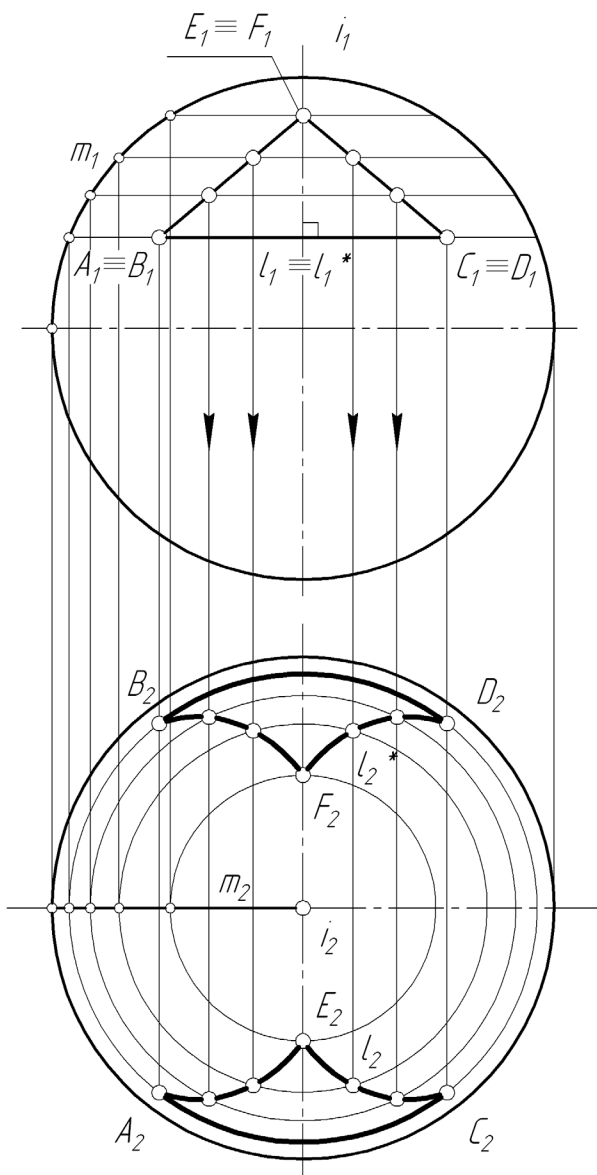


Рис. 38, в

расположены под углом к плоскости проекций  $\pi_2$ , поэтому наклонные сегменты  $AE$ ,  $EC$ ,  $BF$  и  $FD$  во втором поле проецируются в кривые, являющиеся частями эллипсов. Для их построения необходимо найти несколько промежуточных точек (рис. 38, *в*). В качестве вспомогательных линий для построения точек, принадлежащих сферической поверхности  $\Omega(i, m)$ , использованы вспомогательные окружности-параллели.

Результатом решения задачи являются проекции  $l_2$  и  $l_2^*$  линий  $l$  и  $l^*$ , принадлежащих заданной сферической поверхности. При проецировании на фронтальную плоскость проекций проекции видимой  $l$  и невидимой  $l^*$  линий совпадают. При проецировании на плоскость  $\pi_2$  обе построенные линии являются видимыми.

Заметим, что линии  $l$  и  $l^*$  можно рассматривать как результат пересечения фронтально-проецирующей призматической поверхности с заданной сферической поверхностью  $\Omega(i, m)$ .

### ЗАДАЧА 23

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точек  $L$ ,  $M$  и  $N$ , принадлежащих торовой поверхности  $\Sigma(i, a)$  (рис. 39, *а*).

#### **Комментарии к решению задачи:**

В качестве вспомогательных линий для построения точек, принадлежащих поверхностям вращения, к которым относится торовая поверхность, используют окружности-параллели.

Построение недостающей проекции точки  $L$ , принадлежащей торовой поверхности (рис. 39, *б*): через заданную проекцию  $L_1$  точки  $L$  проводим фронтальную проекцию  $p_1$  вспомогательной параллели  $p$ , которая в первом поле изображается в виде отрезка прямой. Строим вторую проекцию параллели  $p$ , которая на горизонтальной проекции проецируется в дугу окружности  $p_2$ . На пересечении линии связи с горизонтальной проекцией параллели  $p$  отмечаем горизонтальную проекцию  $L_2$  точки  $L$ . Точка  $L$  является видимой при проецировании и на фронтальную, и на горизонтальную плоскости проекций.

Недостающие проекции точек  $M$  и  $M^*$  определяются из условия их принадлежности, соответственно, экватору  $e$  и горлу  $h$  торовой поверхности. Точки  $M$  и  $M^*$  являются точками изменения видимости при проецировании на горизонтальную плоскость проекций, так как их проекции  $M_2$  и  $M_2^*$  лежат на горизонтальном очерке поверхности. При проецировании на фронтальную плоскость проекций проекции видимой  $M$  и невидимой  $M^*$  точек совпадают.

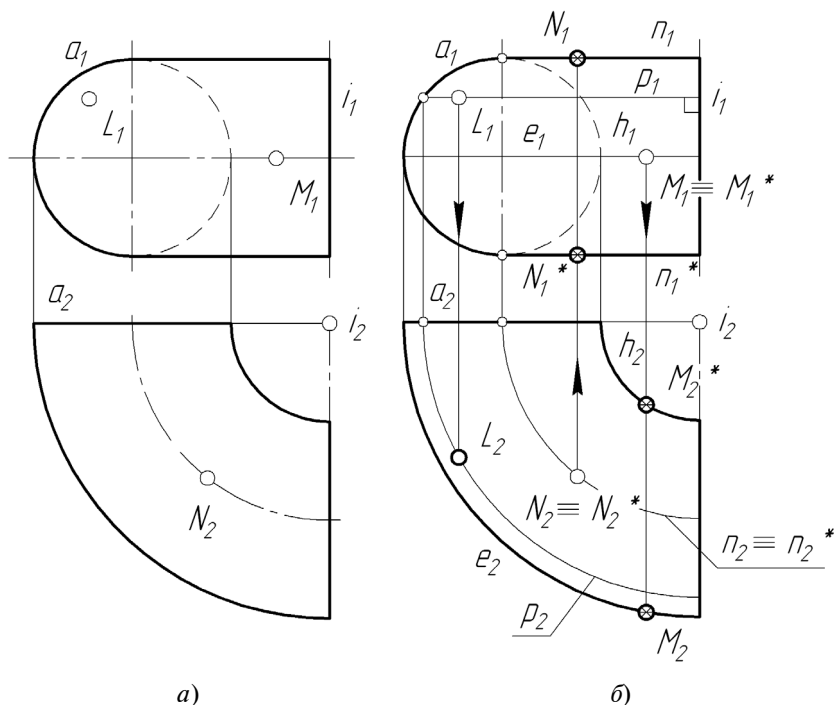


Рис. 39

Для построения фронтальных проекций точек  $N$  и  $N^*$  в поле  $\pi_2$  через заданную проекцию  $N_2$  точки  $N$  нужно провести проекции вспомогательных параллелей  $n$  и  $n^*$ , которые проецируются в дуги окружностей  $n_2$  и  $n_2^*$ , совпадающие с осью торовой поверхности. Точки  $N$  и  $N^*$  являются точками изменения видимости при проецировании на фронтальную плоскость проекций, так как принадлежат очерковыми линиями — проекциям  $n_1$  и  $n_1^*$  параллелей  $n$  и  $n^*$ . При проецировании на горизонтальную плоскость проекций точка  $N$  — видна, а  $N^*$  — невидима.

## ЗАДАЧА 24

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей торовой поверхности  $\Psi(i, a)$  (рис. 40, а). Определить видимость.



**Комментарии к решению задачи:**

Линию  $l$  можно рассматривать как линию пересечения горизонтально-проецирующей плоскости с торовой поверхностью, которая во втором поле проецируется в отрезок прямой. На фронтальной плоскости проекций линия  $l$  проецируется в плоскую незамкнутую кривую, для построения которой необходимо определить проекции нескольких точек, ей принадлежащих.

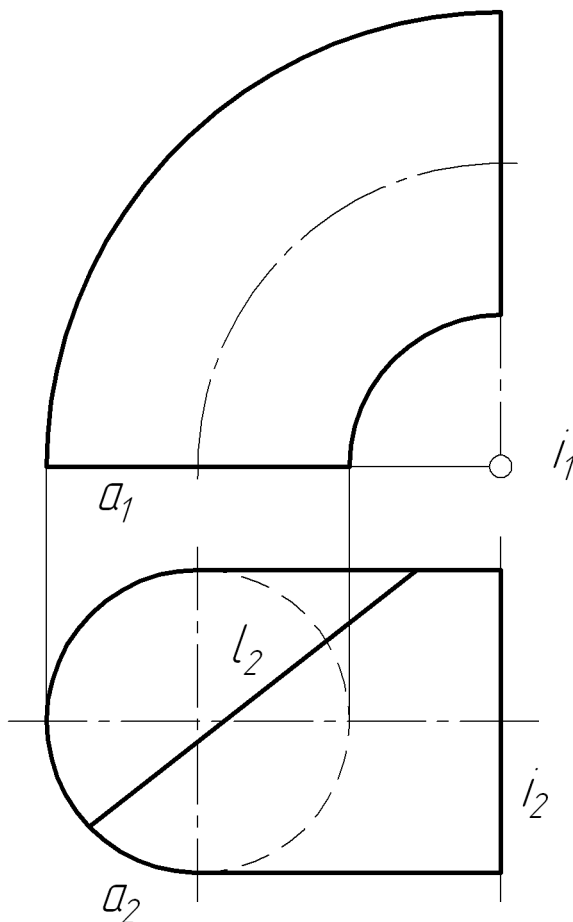


Рис. 40, а

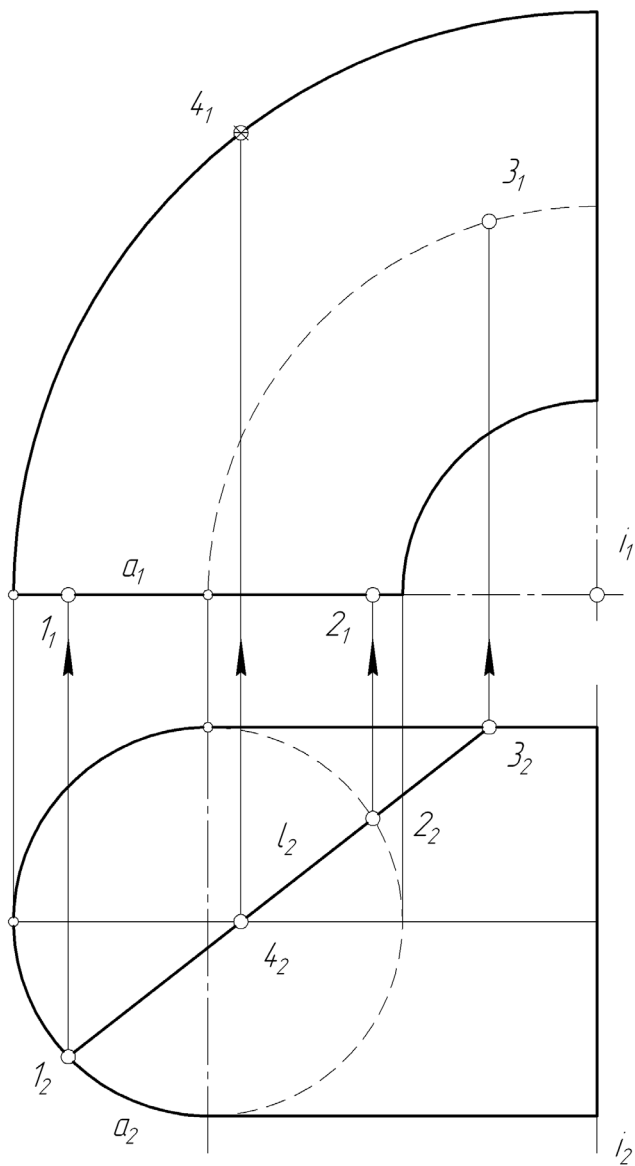


Рис. 40, б

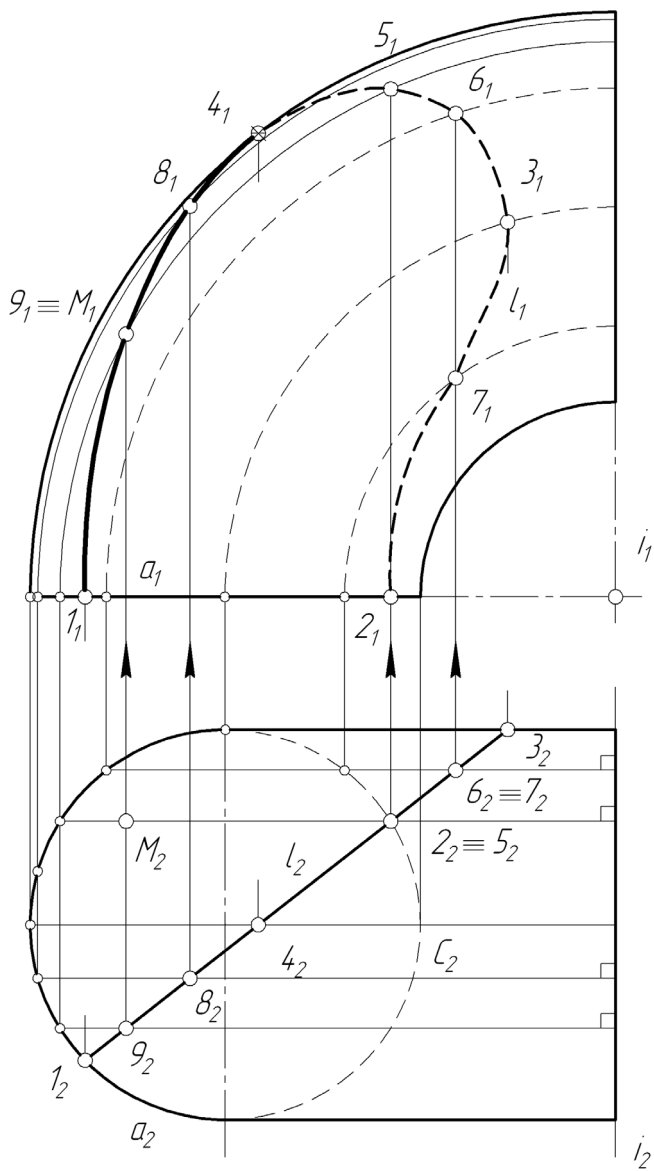


Рис. 40, в

Прежде всего, найдем проекции точек  $1$  и  $2$ , лежащих на образующей окружности  $a$  (рис. 40, б). Затем определим проекции точек  $3$  и  $4$ , проекции которых  $3_2$  и  $4_1$  лежат, соответственно, на горизонтальном и фронтальном очерках поверхности  $\Psi(i, a)$ . Точка  $4$  является точкой изменения видимости при проецировании на плоскость проекций  $\pi_1$ .

В качестве вспомогательных линий при построении проекций промежуточных точек  $5, 6, 7, 8, 9$  использованы вспомогательные окружности-параллели, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси  $i$  вращения заданной торовой поверхности (рис. 40, в).

Решением задачи является проекция  $l_1$  линии  $l$ , видимость которой при проецировании на плоскость проекций  $\pi_1$  определена с помощью горизонтальных проекций конкурирующих точек  $9$  и  $M$ .

## ЗАДАЧА 25

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точек  $L, M$  и  $N$ , принадлежащих поверхности эллипсоида  $\Omega(i, k)$  (рис. 41, а).

### *Комментарии к решению задачи:*

Так как эллипсоид является поверхностью вращения, в качестве вспомогательных линий для построения точек, принадлежащих его поверхности, используют окружности-параллели.

Для построения фронтальных проекций точек  $L$  и  $L^*$  (в данном случае возможны два варианта) через заданную проекцию  $L_2$  проведем проекции  $p_2$  и  $p_2^*$  вспомогательных параллелей  $p$  и  $p^*$ , которые в поле  $\pi_2$  проецируются в окружности (рис. 41, б). Фронтальными проекциями построенных параллелей являются отрезки прямых  $p_1$  и  $p_1^*$ . На пересечении линий связи проекций с проекциями параллелей  $p_1$  и  $p_1^*$  отмечаем фронтальные проекции  $L_1$  и  $L_1^*$ , точек  $L$  и  $L^*$ , принадлежащих этим параллелям, а, следовательно, и поверхности эллипсоида. При проецировании на фронтальную плоскость проекций обе построенные точки видимы. При проецировании на горизонтальную плоскость проекций точка  $L$  — видима, точка  $L^*$  — невидима.

Недостающие проекции точек  $M$  и  $N$  определяются из условия их принадлежности, соответственно, главному меридиану и экватору поверхности эллипсоида. Точка  $M$  является точкой изменения видимости при проецировании на фронтальную плоскость проек-

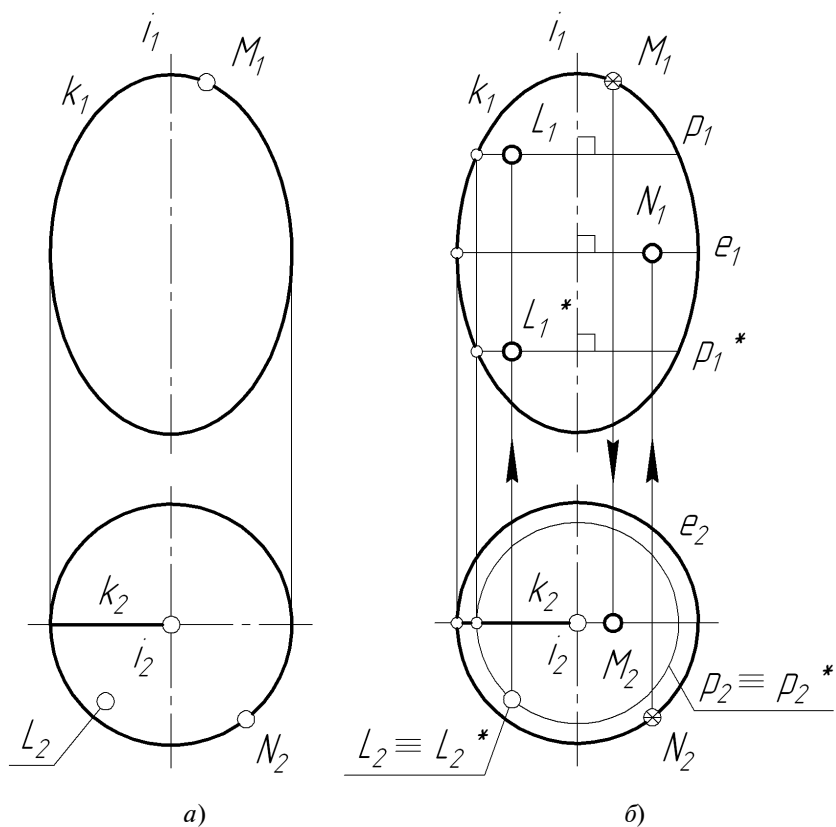


Рис. 41

ций. При проецировании на горизонтальную плоскость проекций точка  $M$  видна. Точка  $N$  является точкой изменения видимости при проецировании на горизонтальную плоскость проекций. При проецировании на фронтальную плоскость проекций точка  $N$  является видимой.

### ЗАДАЧА 26

На эпюре Монжа построить недостающую проекцию линии  $l$ , принадлежащей поверхности эллипсоида  $\Sigma(i, k)$  (рис. 42, а). Определить видимость.

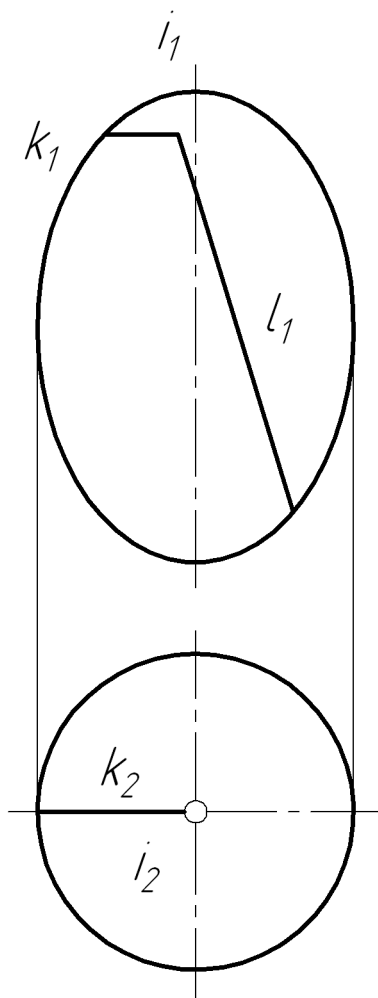


Рис. 42, а

### Комментарии к решению задачи:

Линия  $l$  состоит из двух сегментов. Каждый сегмент можно рассматривать как часть линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости с поверхностью эллипсоида (рис. 42, б).

Плоскость  $\alpha$  пересекает заданную поверхность по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проекций  $\pi_2$ , поэтому сегмент  $\{1, 2, 3\}$  во втором поле проецируется в дугу окружности, для построения которой не требуется промежуточных точек.

В сечении поверхности эллипсоида плоскостью  $\beta$  получается эллипс, видимость которого при проецировании на горизонтальную плоскость проекций меняется в точках 5 и 6, проекции  $5_2$  и  $6_2$  которых принадлежат горизонтальному очерку поверхности эллипсоида. Для построения горизонтальной проекции эллиптической кривой необходимо найти проекции нескольких промежуточных точек (рис. 42, в). Решением задачи является проекция  $l_2$  линии  $l$ . Видимость линии  $l$  при проецировании на горизонтальную плоскость проекций определена с помощью фронтальных проекций конкурирующих точек 7 и  $M$ .

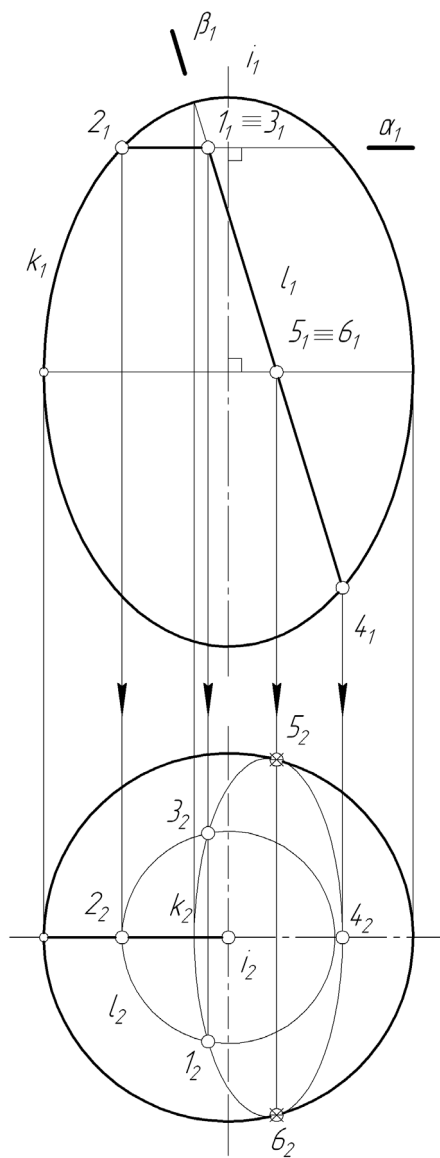


Рис. 42, б

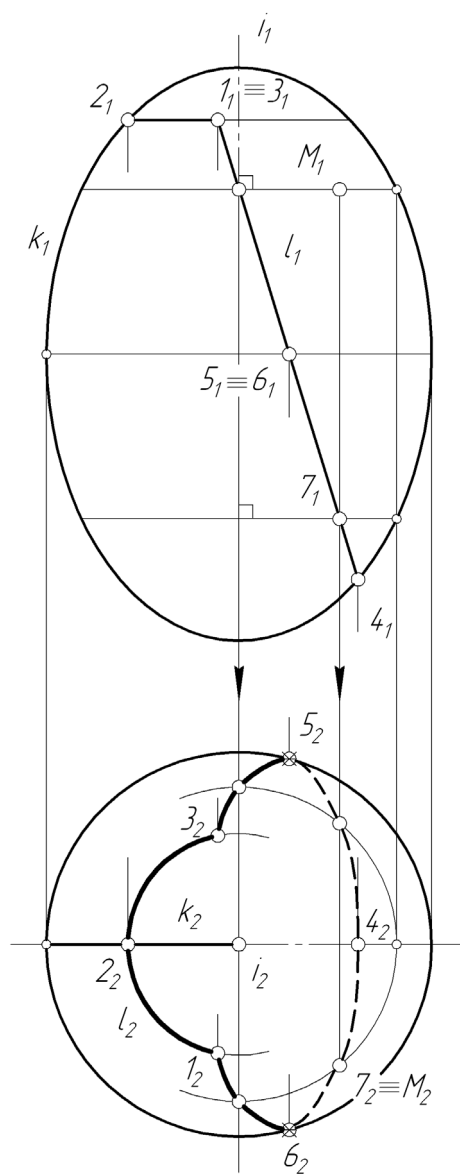


Рис. 42, в



### ЗАДАЧА 27

На эпюре Монжа построить недостающие проекции точек  $L$ ,  $M$  и  $N$ , принадлежащих поверхности глобоида  $\Psi(i, d)$  (рис. 43, а).

#### Комментарии к решению задачи:

Так как глобоид является поверхностью вращения, в качестве вспомогательных линий для построения точек, принадлежащих его поверхности, используют окружности-параллели.

Построение недостающей проекции точки  $L$  (рис. 43, б): через заданную проекцию  $L_1$  точки  $L$  проводим проекцию  $p_1$  вспомогательной параллели  $p$ , которая на фронтальной проекции изображается в виде отрезка прямой. Строим горизонтальную проекцию

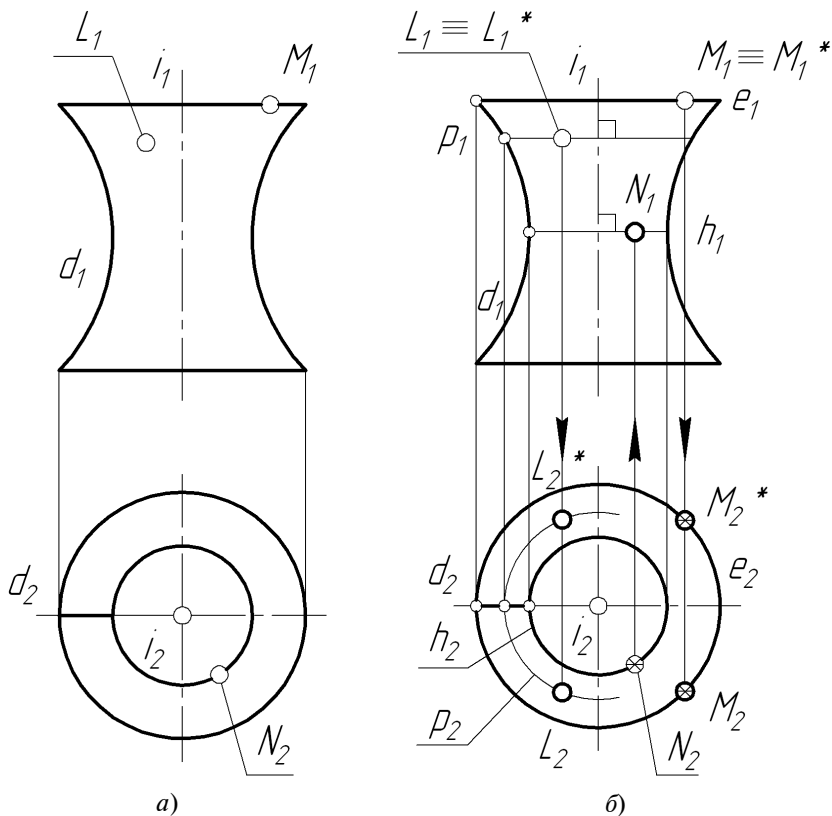


Рис. 43

параллели  $p$  — окружность  $p_2$ . На пересечении линии связи проекций с проекцией параллели  $p_2$  отмечаем горизонтальные проекции  $L_2$  и  $L_2^*$ , точек  $L$  и  $L^*$ , принадлежащих этим параллелям, а, следовательно, и поверхности глобоида. При проецировании на фронтальную плоскость проекций проекции видимой  $L$  и невидимой  $L^*$  точек совпадают. При проецировании на горизонтальную плоскость проекций обе построенные точки видимы.

Недостающие проекции точек  $M$  и  $N$  определяются из условия их принадлежности, соответственно, экватору  $e$  и горлу  $h$  глобоида.

При проецировании на фронтальную плоскость проекций проекции видимой  $M$  и невидимой  $M^*$  точек совпадают. При проецировании на плоскость  $\pi_2$  обе построенные точки являются видимыми.

Точка  $N$  является точкой изменения видимости при проецировании на горизонтальную плоскость проекций. При проецировании на фронтальную плоскость проекций точка  $N$  видна.

## ЗАДАЧА 28

На эпюре Монжа построить недостающие проекции линий  $l$  и  $l^*$ , принадлежащих поверхности глобоида  $\Omega(i, c)$  (рис. 44, *a*). Определить видимость.

### *Комментарии к решению задачи:*

Заданные линии  $l$  и  $l^*$  можно рассматривать как линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости с поверхностью глобоида. Для построения недостающих проекций линий  $l$  и  $l^*$  необходимо найти проекции нескольких точек, принадлежащих каждой кривой (рис. 44, *б*). Основными являются точки  $1, 2, 3, 4$ , принадлежащие экваторам поверхности, и  $5, 6$ , принадлежащие горлу поверхности. В качестве вспомогательных линий для построения промежуточных точек, принадлежащих поверхности  $\Omega(i, c)$ , использованы вспомогательные окружности-параллели. Видимость кривой  $l$  при проецировании на фронтальную плоскость проекций определена с помощью горизонтальных проекций конкурирующих точек  $5$  и  $M$ . Видимость кривой  $l^*$  при проецировании на фронтальную плоскость проекций определена с помощью горизонтальных проекций конкурирующих точек  $6$  и  $N$ . При проецировании на горизонтальную плоскость проекций проекции видимых

(15 и 36) и невидимых (25 и 46) участков линий  $l$  и  $l^*$  совпадают.

Существует огромное многообразие поверхностей. В рамках данного учебного пособия мы рассмотрели алгоритмы построения точек и линий, принадлежащих поверхностям, наиболее часто встречающимся на практике.

Начертательная геометрия не является абстрактной наукой – это теоретическая база для выполнения чертежей реальных технических объектов. В свою очередь, чертеж является интернациональным графическим языком инженеров различных отраслей промышленности. Поэтому дисциплина «Начертательная геометрия. Инженерная графика» является одной из фундаментальных дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Знания, полученные при ее изучении, будут востребованы во многих сферах деятельности.

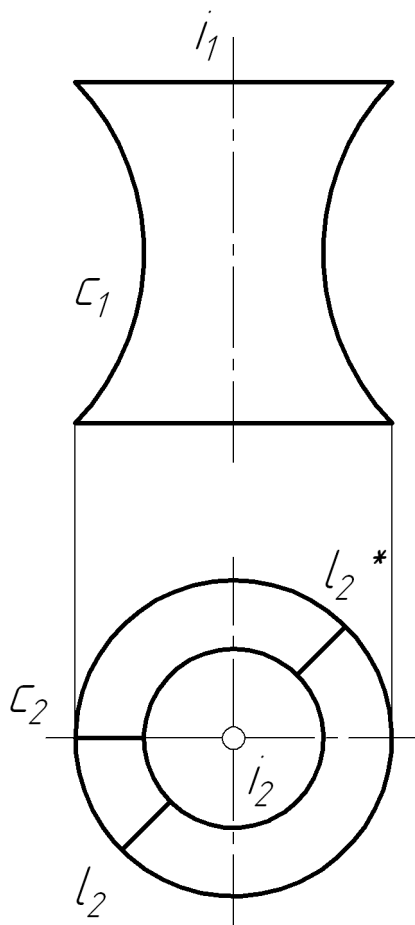


Рис. 44, а

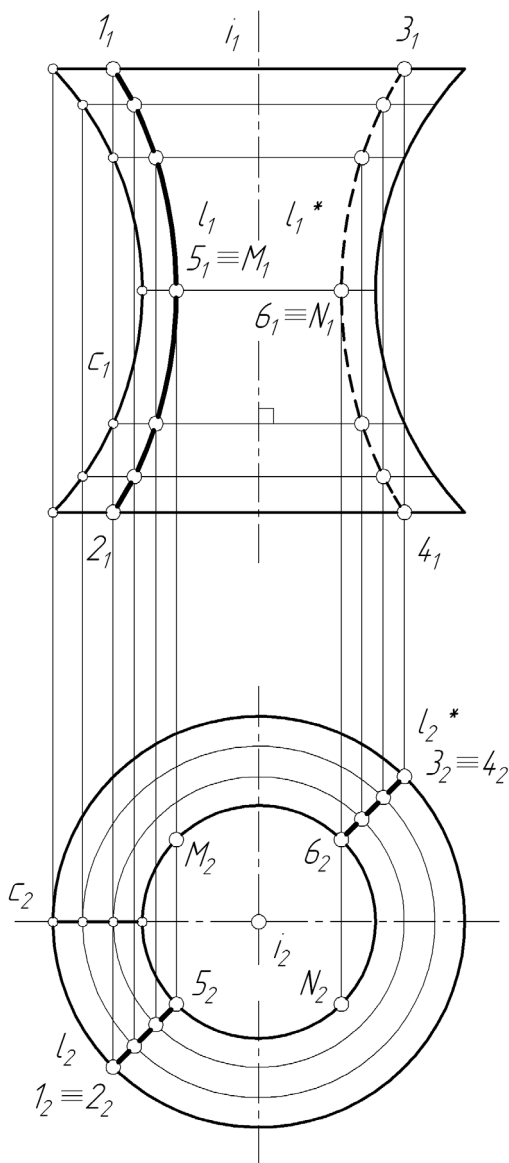


Рис. 44, б

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Единая система конструкторской документации. Общие правила выполнения чертежей: сборник. — М.: Издательство стандартов, 1984. — 230 с.
2. *Волошинов В.А.* Основы проекционного моделирования: учеб. пособие / В.А. Волошинов, М.Д. Половинкин, Л.Н. Шерешкова. — Обнинск, 1989. — 86 с.
3. *Волошинов В.А.* Начертательная геометрия. Инженерная графика. Позиционные задачи на проекционных моделях трехмерного пространства: учеб. пособие / В.А. Волошинов. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. — 30 с.
4. *Иванова Н.С.* Учебно-методический комплекс «Начертательная геометрия. Инженерная графика» [Электронный ресурс] / Н.С. Иванова, Е.В. Князева; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 316 Кб). — СПб., 2007.
5. *Каргин Д.И.* Гаспар Монж — творец начертательной геометрии / Д.И. Каргин // Гаспар Монж: сборник статей к двухсотлетию со дня рождения; под ред. В.И. Смирнова. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — С. 17—44.
6. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Проекционные модели трехмерного пространства. Моделирование геометрических объектов: учеб. пособие / Ю.Я. Андрейченко [и др.]. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 36 с.
7. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Метрические задачи на проекционных моделях трехмерного пространства.: учеб. пособие / Ю.Я. Андрейченко [и др.]. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. — 25 с.
8. *Фролов С.А.* Начертательная геометрия: учебник для вузов / С.А. Фролов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1983. — 240 с.

*Иванова Наталия Сергеевна*

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА**  
**ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ИНЦИДЕНТНОСТЬ**  
**ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Учебное пособие

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

---

Подписано в печать 13.05.2009. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 0. Уч.-изд. л. 0. Тираж 000. Заказ 000.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.